MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

HUSZONÖTÖDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTI

FEJÉR LIPÓT

BUDAPEST 1916

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HUSZONÖTÖDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

Második—Negyedik füzet.

Ötödik—Hatodik füzet.

Hetedik—Nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ

A HUSZONÖTÖDIK KÖTETHEZ.

Önálló és ismertető czikkek.

Physikai Szemle.

Társulati ügyek. Tanulóversenyek, stb.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi füzetben jelenik meg,* a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K, A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

25. évfolyam. 1916. január. 1. füzet.

HARMÓNIKUS MOZGÁS LEFOLYÁSA KÜLSŐ ERŐ HATÁSA ALATT.

Az erő általában nemcsak a táglatot, hanem a fázist is megváltoztatja, miből folyólag a lengési idő is más lesz, mint a szabad lengésnél. A következőkben felállítjuk annak feltételét, hogy csak a táglat változzék, ellenben a fázis az erő megszünte után megegyezzék a szabad lengésével és igy a lengési idő is változatlan maradjon. Felkeressük azon időt, a meddig az erőnek hatni kellett, hogy az teljesítve legyen.[1]

A szabad lengésnél legyen t pillanatban a kitérés x_0,

$$x_0 = ae^{-\delta t} \cos(\omega t)$$

[1] Ennek lehetősége a következő megfontolásból tűnik ki. A harmónikus mozgás folyton működő «központi» erő működéséhez van kötve, mely a testet mindig az eredeti nyugalmi helyzet felé igyekszik terelni, a két oldalon tehát ellenkező előjelű. Minél nagyobb ez az erő különben egyenlő viszonyok közt, annál rövidebb a lengési idő.

Midőn ezenkívül még külső erő is hat, mely párhuzamos a mozgás irányához és folyton ugyanazon értelemben működik, az egyik oldalon erősíti a «központi» erőt és ezzel csökkenti a lengési időt. Nyilvánvaló, hogy az ilyen erő nem felel meg követelményünknek.

Ha már most az erő csak a nyugalmi helyzet ellenkező oldalán működik, de túlnyomó marad a «központi» erő, mert különben megszűnnék a lengés, az eredő erő kisebb, tehát a lengési idő hosszabb lesz.

A kétféle hatás csak akkor egyenlítheti ki egymást, ha együtt érvényesülnek; a külső erőnek tehát a nyugalmi helyzet egyik oldalán kell kezdődni és még a másik oldalra is ki kell terjednie. Az erő megszűnhet egy fél lengésen belül, de át is nyúlhat a következő vagy egy későbbi féllengésbe.

Erre vonatkozó szerkesztést lásd SCHULLER A. Az elektromos jelzőkészülékekről. Math. és Természettud. Értesítő X. 1892, 214. lap.

és a sebesség:

$$v_0 = -ae^{-\delta t}\left(\omega \sin(\omega t) + \delta \cos(\omega t)\right) = \frac{dx_0}{dt}, \tag{1}$$

a hol $a =$ a kezdeti táglat $t = 0$ pillanatban, $e =$ a természetes logaritmusok alapszáma, $\delta =$ a csillapodási tényezö, melyet állandónak tételezünk fel, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ és $T =$ a lengési idő.

A külső erő t_1 pillanatban kezdjen hatni, a mikor a kitérés $x_{0,1}$ és a sebesség $v_{0,1}$:

$$\begin{aligned} x_{0,1} &= ae^{-\delta t_1}\cos(\omega t_1) \\ v_{0,1} &= -ae^{-\delta t_1}\left(\omega \sin(\omega t_1) + \delta \cos(\omega t_1)\right). \end{aligned} \tag{2}$$

t_2 pillanatban szűnjön meg a külső erő hatása és ekkor feltevésünk szerint a kitérés $x_{0,2}$ és a sebesség $v_{0,2}$ legyen, ugyanakkora, mint $(a \,.\, c)$-táglatú szabad lengésnél lenne, mely az előbbivel egyidejűleg kezdődött, azaz legyen:

$$\begin{aligned} x_{0,2} &= a \,.\, c \,.\, e^{-\delta t_2}\cos(\omega t_2) \\ v_{0,2} &= -a \,.\, c \,.\, e^{-\delta t_2}\left(\omega \,.\, \sin(\omega t_2) + \delta \cos(\omega t_2)\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Szabad lengésnél a mozgás gyorsulása az előbbi megjelölésnek megfelelően legyen

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = \frac{dv_0}{dt}$$

és ha a külső erő a maga részéről $f(t)$ gyorsulást okozza, t_1-től t_2-ig terjedő időközben a mozgás gyorsulása ez lesz:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_0}{dt^2} + f(t)$$

vagy (4)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_0}{dt} + f(t).$$

A lineáris alak folytán ebből azonnal következtethetjük:

$$v = v_{0,2} + \int_{t_1}^{t_2} f(t) \,.\, dt$$

$$x = x_{0,2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} f(t) \,.\, dt \,.\, d\tau$$

v és x nem harmónikus lefolyásúak, de a t_2 időben elért értékek megegyezhetnek a harmónikus mozgáshoz tartozó értékekkel, ha táglatát $a \,.\, c$ és fázisát φ kellően megválasztjuk. Ez esetben

$$v = -a \,.\, c \,.\, e^{-\delta t}\left(\omega \sin(\omega t_2 + \varphi) + \delta \cos(\omega t_2 + \varphi)\right) =$$
$$= v_{0,2} + \int_{t_1}^{t_2} f(t) \,.\, dt$$

$$x = a \,.\, c \,.\, e^{-\delta t} \cos(\omega t_2 + \varphi) = x_{0,2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} f(t) \,.\, dt \,.\, d\tau$$

$$\frac{v}{x} = -\omega \operatorname{tg}(\omega t_2 + \varphi) - \delta = \frac{v_{0,2} + \int_{t_1}^{t_2} f(t) \,.\, dt}{x_{0,2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} f(t) \,.\, dt \,.\, d\tau} \,.$$

φ nem állandó, hanem függ t_1 és t_2-től; az előbbiek szerint azonban az időket úgy akarjuk megválasztani, hogy a lengési idő változatlan maradjon, tehát $\varphi = 0$ legyen, akkor

$$\frac{v}{x} = \frac{v_{0,2}}{x_{0,2}} = -\omega \operatorname{tg}(\omega t_2) - \delta,$$

miből következik:

$$-\omega \operatorname{tg}(\omega t_2) - \delta = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \,.\, dt}{\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} f(t) \,.\, dt \,.\, d\tau} \,. \tag{5}$$

Ezen összefüggést tekinthetjük ama feltételnek, melyet teljesíteni kell, hogy a lengési idő a külső erő hatása alatt ugyanaz maradjon, mint a csillapodó szabad lengésnél. A feltétel az időköz kellő megválasztásával mindig teljesíthető, míg a külső erő csak az idő függvénye és folytonos, mert a tangens minden értéket felvehet $-$ és $+$ végtelen közt. Hogy egyes példákra alkalmazhassuk, hanyagoljuk el a csillapodási tényezőt δ-t, mely p. csillagászati óra ingájánál igen csekély és tételezzük fel, hogy a külső erő gyorsulása:

$$f(t) = A + B(t-t_1) + C(t-t_1)^2 + D(t-t_1)^3 + \cdots \tag{6}$$

a mikor

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,.\,dt = A(t_2-t_1) + \frac{B}{2}(t_2-t_1)^2 + \frac{C}{3}(t_2-t_1)^3 + \frac{D}{4}(t_2-t_1)^4 + \cdots$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt\,.\,d\tau = \frac{A}{2}(t_2-t_1)^2 + \frac{B}{6}(t_2-t_1)^3 + $$

$$+ \frac{C}{12}(t_2-t_1)^4 + \frac{D}{20}(t_2-t_1)^5 + \cdots$$

$$-\omega \operatorname{tg}(\omega t_2) =$$

$$= \frac{2}{t_2-t_1} \frac{A + \frac{B}{2}(t_2-t_1) + \frac{C}{3}(t_2-t_1)^2 + \frac{D}{4}(t_2-t_1)^3 + \cdots}{A + \frac{B}{3}(t_2-t_1) + \frac{C}{6}(t_2-t_1)^2 + \frac{D}{10}(t_2-t_1)^3 + \cdots}. \tag{7}$$

1. Legyen pl. az erő állandó. $B = C = D = \cdots = 0$, tehát hirtelen erősödjék meg és éppoly hirtelen szűnjön is meg. Akkor

$$-\omega \operatorname{tg}(\omega t_2) = \frac{2}{t_2-t_1},$$

a mit a könnyebb számitás végett így írunk, tekintetbe véve, hogy

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$-\operatorname{cotg}\frac{2\pi t_2}{T} = \pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{t_1}{T}\right).$$

Legyen $t_1 = n_1 T$ és $t_2 = n_2 T$

$$-\operatorname{cotg} 2\pi n_2 = \pi(n_2 - n_1),$$

vagy 2π helyébe 360 fokot írva:

$$-\operatorname{cotg} 360^\circ\, n_2 = \pi(n_2 - n_1). \tag{8}$$

Amíg a jobboldal pozitiv, a cotangesnek negativnek kell lennie, a szögnek tehát 90 és 180 fok közé vagy 270 és 360 közé kell esni. Ez azt jelenti, hogy az erőnek oly időszakban kell megszűnni, mikor a mozgó pont az egyensúlyi helyzettől távolodik.

Legyen pl. $t_1 = 0$, az erő a legnagyobb kitérés pillanatában kezdjen hatni, tehát $n_1 = 0$, akkor

$$-\operatorname{cotg} 360\, n_2 = \operatorname{tg}(360\, n_2 - 90) = \pi n_2.$$

Ennek közelítőleg megfelelnek a következő értékek:

Midőn $n_2 = 0{\cdot}3913$, $\operatorname{tg}(360 n_2 - 90) - \pi n_2 = -0{\cdot}00018$
« $n_2 = 0{\cdot}3914$, $\operatorname{tg}(360 n_2 - 90) - \pi n_2 = +0{\cdot}00107$

a helyes érték tehát a kettő közé esik. A megfelelő szögek:

$$360\, n_2 = 140°\ 52{\cdot}08' \text{ illetőleg } 140°\ 54{\cdot}24'.$$

Midőn tehát az erő a legnagyobb kitérés pillanatában kezd működni, $t_2 = 0{\cdot}3913 . T$ pillanat közelében kell megszűnnie, hogy a lengési idő változatlan maradjon. Lehetségesek azonban még más esetek is, pl. egy egész lengésen belül maradva közelítőleg megfelelnek a következő értékek is:

$t_2 = 0{\cdot}948497T$, $\operatorname{tg}(360\, n_2 - 90) - \pi n_2 = +0{\cdot}00135$
$t_2 = 0{\cdot}948417T$, $\operatorname{tg}(360\, n_2 - 90) - \pi n_2 = -0{\cdot}00326$

az illető szögek: $360\, n_2 = 341{\cdot}456°$ illetőleg $341{\cdot}428°$.

Ezek szerint $t_1 = 0$-nak már egy ide-oda rezgésen belül is két t_2-érték felel meg.

Midőn az erő nem a legnagyobb kitérés pillanatában, hanem később kezd hatni, azaz $t_1 > 0$, a (8)-egyenlet jobb oldala csökkenvén, $-\operatorname{cotg} 360\, n_2$-nek is csökkenni kell, tehát n_2-nek is mindkét esetben kisebbnek kell lennie. A negativ cotangens miatt n_2 legkisebb értékei egyrészt $1/4$, másrészt $3/4$; és minthogy ekkor a cotangens nulla, következik, hogy $t_1 = t_2$, tehát n_1 is vagy $1/4$ vagy $3/4$. Ez azt jelenti, hogy az erőnek mindkét esetben csak végtelen rövid ideig szabad hatni, a mi már régóta ismeretes. Mikor t_2 igen kevéssel haladja meg t_1-et és közel egyenlők $1/4$-del, az erő fokozza a kitérést, míg ugyanolyan irányban ható erő $3/4$ közelében csökkenti. Hasonló megjegyzések érvényesek a többi esetekben is, nevezetesen a külső erő csak addig erősíti a lengést, míg a mozgással megegyező irányban hat.

Fejtegetéseink lényegben akkor is érvényesek maradnak, mikor t_1 negativ, az erő tehát előbb kezd működni, mint a legnagyobb kitérés pillanatában, csakhogy a számértékek kissé mások lesznek. Ilyen az eset az egyik közleményemben[1] leírt kontaktusnál, azzal a különbséggel, hogy az erő nem állandó.

Az imént tárgyalt esetek közül a fontosabbat kiemelve, a mondottakból következik, hogy állandó erő a legnagyobb kitérés pillanatától kezdve $T/4$ időszak bármely pillanatában kezdhet működni, mindig létezik olyan, $T/4$ és $T/2$ közé eső időpillanat, melyben az erőnek meg kell szűnnie, hogy a teljes lengés tartama változatlan maradjon. Egyúttal kitűnik az is, hogy ennek a feltétele független lehet az erő nagyságától és irányától.

A csillapodási tényező δ tekintetbe vétele a közölt számértékeken csak keveset változtatna.

2. Legyen a (6)-ik képletben $A = 0$, $C = 0$ és $D = 0$, úgy hogy a külső erő gyorsulása $f(t) = B(t - t_1)$, az erő tehát nulla értéktől folytonosan növekszik, de t_2 pillanatban hirtelen megszűnik. Akkor (7) szerint

$$-\frac{1}{\omega} \operatorname{cotg} (\omega t_2) = \frac{t_2 - t_1}{3},$$

miből

$$-\operatorname{cotg} (360\, n_2) = \frac{2\pi}{3} (n_2 - n_1),$$

mely feltétel szintén teljesíthető.

Hasonlók a viszonyok, ha gyorsulás kifejezésében csak C vagy csak D marad meg, ha tehát:

$$f(t) = C(t - t_1)^2$$

vagy

$$f(t) = D(t - t_1)^3.$$

---

[1] Egyszerű higany megszakító elektromágnessel hajtott inga számára Math. és Phys. Lapok 23. évf. 161. 1914.

3. Az előbbi esetekben az erő hirtelen szűnt meg, az elsőben a megerősödés is hirtelen történt. Fokozatosan megerősödő és elgyöngülő erőhöz jutunk, ha feltételezzük, hogy a külső erő gyorsulása $(t-t_1)(t_2-t)$ szorzat függvénye.

A legegyszerűbb ilynemű esethez jutunk, ha (6) képletben $A=D=0$ és C negativ, tehát:

$$f(t)=B(t-t_1)-C(t-t_1)^2$$

és feltételezzük, hogy a külső erő t_2 pillanatban is nulla, akkor

$$B(t_2-t_1)-C(t_2-t_1)^2=0,$$

tehát

$$B=C(t_2-t_1),$$

úgyhogy

$$f(t)=C[(t_2-t_1)(t-t_1)-(t-t_1)^2]=C(t-t_1)(t_2-t),$$

akkor (7)-ből következik:

$$-\frac{1}{\omega}\operatorname{cotg}(\omega t_2)=\frac{t_2-t_1}{2}.$$

A feltétel ugyanaz, mint állandó erőnél, tehát szintén teljesíthető.

Mindezekből következik, hogy harmónikus lengést időközönként működő külső erővel lehet oly módon fenntartani, hogy fázisváltozás nem következik be, a lengési idő tehát ugyanaz marad, mint a szabad lengésnél. Az itt tárgyalt esetekben a lengési idő elméletileg független az erő nagyságától is. Ennek a gyakorlati fontosságát abban látom, hogy az erőnek elkerülhetetlen ingadozásai a lengési időt csak igen kis mértékben módosíthatják, csakis annyiban, a mennyiben a lengési idő véges kitéréseknél függ a kitérés nagyságától. Elvileg még az sincs kizárva, hogy az erő működési idejének kellő megválasztásával ezt a befolyást is ellensúlyozhassuk.

Az eredmény kisérleti igazolása elektromágneses hangvillákkal eddig nem sikerült, mert a táglatok nem maradtak elég soká állandók, megfelelő ingákkal pedig még nem volt alkalmam dolgozni.

Schuller Alajos.

ELEKTROSTATIKAI TRANSFORMÁLÓ.

Újabban megszaporodtak az esetek, melyekben néhány száz vagy ezer volt feszültségre van szükségünk, melyet elemekkel előállítani igen költséges és alkalmatlan; ezért közlöm a következő készüléket, mely aránylag kevés elem feszültségét tetemesen felfokozza, ámbár lényege már ismeretes;[1] annál is inkább tartom a közlésre érdemesnek, mert szerkezetem elég lényeges tekintetben fölülmúlja Hallwachs készülékét, melyet úgylátszik egyáltalában nem alkalmaznak és különösen az itt szem előtt tartott czélokra még csak szóba sem hoztak.

A készülék egy kondenzátor méretváltozását használja fel a feszültség növelésére vagy esetleg csökkentésére.

Legyen az egyik vezető A földelve, egy másik, hozzá közel álló B elszigetelve és vezessünk az utóbbihoz Q elektromosságmennyiséget, mely V_0 potenciálra feltölti és jelöljük a megfelelő kapacitást c_0-lal, akkor

$$Q = c_0 V_0.$$

Távolítsuk el most a vezetőket egymástól annyira, hogy a kapacitás c-re csökkenjen, akkor feltéve, hogy veszteség nem fordult elő és az új potenciál V,

$$Q = cV$$

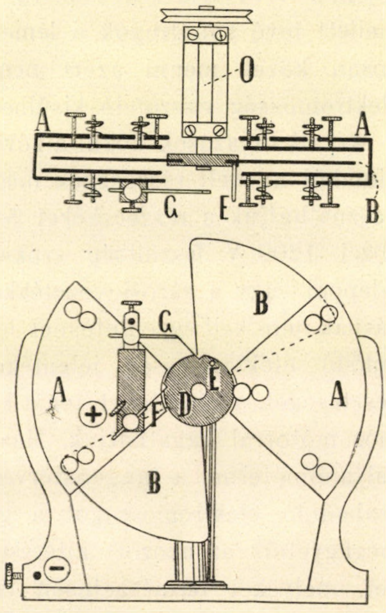
tehát

$$V = \frac{c_0}{c} V_0$$

az új feszültség tehát $\frac{c_0}{c}$-szerese az eredetinek.

[1] W. Hallwachs: Potentialverstärker für Messungen. Wied. Ann. 29. 300. 1886. — A. Einstein: Eine neue elektrostatische Methode zur Messung kleiner Elektrizitätsmengen. Phys. Z. 9. 216. 1908. C. u. P. Habicht: Elektrostatischer Potentialmultiplikator nach A. Einstein ibid. 532. 1910.

Készülékemen B vezető két egymással összekötött lemezből áll (az 1. ábrában felülről, a 2.-ban oldalról nézve), melyek az O tengelyen lévő D szigetelőhöz vannak erősítve, míg az A vezetőt alkotó quadránsok szilárdan állanak az ábrából elhagyott faalzaton. B-lemezek E-nél a szigetelőből kiálló szöggel érintkeznek, mely forgásközben szabadon mozog, csak bizonyos helyzetekben érinti vagy az F vagy a G rugót. Használat közben F és A az áramforrás sarkaival, G a megtöltendő vezetővel vannak összekötve.



1. és 2. ábra.

Midőn a tengely forgása közben B az A vezetők közt halad el, F rövid időre érinti E-t, minek következtében c_0 kapacitásnak megfelelő Q elektromosság helyezkedik el B lemezeken és A-hoz képest kifejlődik a telep által meghatározott V_0 potenciálkülönbség. Mikor pedig egy negyed fordulattal később E érinti G rugót, az előbb lekötve volt elektromosság részben átmegy az utóbbival összeköttetésben lévő vezetőre és ez ismétlődik minden következő fordulatnál. Ha a G-vel kapcsolatos vezető eléggé el van szigetelve, a mihez igen száraz levegő szükséges, potenciálja végül eléri V értéket, a potenciál tehát nemcsak tetemesen magasabb, hanem egyúttal állandó is. Mikor a szigetelés nem tökéletes, az elérhető potenciál valamivel csekélyebb, de közelítőleg szintén állandó lesz, míg tökéletes levezetésnél csak időszakos egyenáram keletkezik. Mind a három esetben fel van tételezve, hogy önkéntes kisülések nem fordulnak elő, hogy tehát az egymáshoz közel jutó vezetők potenciálkülönbsége nem túlságosan nagy.

Hallwachs az egyenes lemezek helyett hengerrészeket alkalmazott, melyek hasonló szilárdan álló részek közt mozognak. A kapacitás nem változtatható és csak egyféle sokszorosítást lehet elérni, mely közel 9-szeres volt. Az egyenes lemezekkel a sokszorosítást tág határok közt módosíthatjuk azáltal, hogy a nyugvó lemezeket közelebb vagy távolabb toljuk. Erre szolgálnak az ábrán felismerhető kis csavarok, melyekkel az *A* belsejében lévő lemezeket befelé szoríthatjuk, míg a csavarkák mellett levő spirálrugók a lemezeket visszafelé húzzák. Túlságosan közel menni azért nem szabad, mert a felszabaduló elektromosság visszafelé kisülhet.

Az alkalmazások közül a következő kettőt emelem ki. A rádiumból kilövelt részecskék megszámlálásánál a készüléket felhasználhatjuk a részecskéket felfogó csúcs megtöltésére. Erre közel 1200 V feszültség szükséges, a mit 100 V feszültségű teleppel vagy a városi vezetékkel érhetünk el. Ilyenkor a forgásnak nem kell egyenletesnek lenni, csak az szükséges, hogy a fejlődő elektromosság jelentékenyen fölülmúlja a szigetelési veszteséget, a készüléket tehát kézzel, óraművel vagy kis elektromos mótorral forgathatjuk. Más alkalmazás abban áll, hogy a galvanométernél a tangenstörvényt igazoljuk vele. Ekkor a felszabaduló elektromosságot a galvanométeren vezetjük át és megfigyeljük az okozott kitérést legalább két forgási sebességnél, melyeket természetesen ismerni kell. Az ilyen esetben jelentékenyen fokozhatjuk a készülék kapacitását négy forgó quadráns alkalmazásával, melyek közül két-két szemközt lévő egymással van kapcsolatban és melyek mindegyike el van látva az *E*-vel jelölt érintkező szöggel. A galvanométerbe jutó elektromosság akkor négyszer annyi lesz, mint két forgó quadráns és csak egy szög használatakor. Hogy ezt a körülményt az előbbi esetben nem használtam fel, annak oka az, hogy a forgó rész négy helyzetében a készülék tökéletlensége folytán a kapacitás nem egyenlő, a felszabaduló elektromosság feszültsége tehát ingadozó lenne.

A galvanométerkisérletnél egyféle forgási sebességgel is beérhetjük, melyet még ismerni sem kell, csak elég állandóan legyen fenntartható. Evégből az *E* érintőszögeket különböző hosszúra készítjük, az egyik quadránspárhoz tartozókat hosszabbra és a forgási tengelyhez közelebb, a másik kettőt rövidebbre és a tengelytől távolabb helyezzük el. Egyúttal nem egy, hanem két *G*-vel jelölt rugót alkalmazunk, melyek egyike csak a hoszszabb, másika csak a rövidebb szögeket érinti. Akkor a két rugó vezetékének összekapcsolása folytán a kapacitások összege érvényesül.

A kapacitást különben tetemesen fokozhatjuk a lemezek közelítésével is, csak a visszafelé való kisülést kell megakadályozni, mely czélból *G* érintőknek olyan alakot adunk, hogy *E* pecket közvetlenül az *F* elhagyása után kezdje érinteni, mielőtt *B* az *A* belsejéből kijött, azaz mielőtt a feszültség tetemesen fokozódhatott volna.

Jelenleg a szikratelegrafálás céljára több forgó lemezből álló, nagyobb kapacitású úgynezett forgólemezes kondenzátort hoznak forgalomba, mely tökéletes kivitele által tűnik ki. Ezt is fel lehetne használni az említett célokra, csak a kapcsolást kellene az itt megjelöltnek megfelelően módosítani. A kapacitás változtatásáról azonban le kellene mondani.

Zavaró elektromos hatásokat minden esetben az ismeretes módon kell elhárítani.

Schuller Alajos.

VISZKÓZUS FOLYADÉK MOZGÁSA A LEJTŐN.

1. Ha jól megtisztított üveglapot, lombikot vagy bármilyen tárgyat, a melyet a víz jól nedvesít, folyó vízsugárban öblögetünk, a víz szép, egyenletes rétegben ömlik végig rajta s úgy csorog le a legmélyebb pontján. Ennek a jelenségnek quantitativ leírása, mondhatnók «az öblögetés elmélete» a kiindulási tárgya a következő fejtegetéseknek. Egyébként ezek alig tartalmaznak többet, mint a mit a hidrodinamikai differenciálegyenleteknek egy egyszerű, általánosan ismeretes megoldásából egy kis ügyeskedéssel ki lehet olvasni; azonban az alkalmazásuk a belső súrlódás mérésének egy újnak látszó módszerére s bizonyos technikai berendezés elméletére talán némi érdeklődésre tarthat számot.

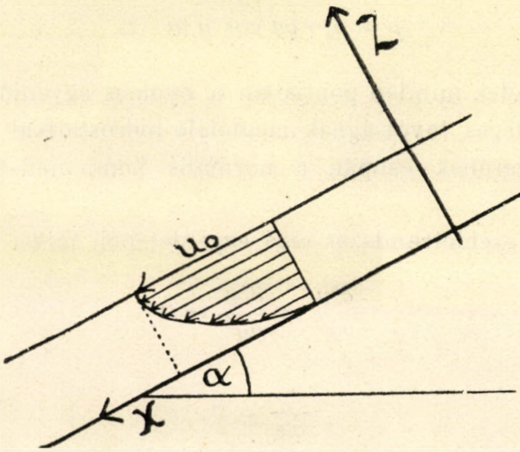
2. Az α hajlású lejtőre ömöljön a folyadék a lejtőn fekvő, vízszintes, vonalszerű forrásból. Világos, hogy ez esetben a folyadékrészecskék mind azokban az egymással párhuzamos, függőleges síkokban mozognak, a melyek a lejtőt a legmeredekebb α hajlású egyenesekben metszik; a mozgásuk eleinte gyorsuló lesz s a lejtőt borító folyadékréteg vastagsága folyton csökken, végül — a belső súrlódás következtében — elérnek bizonyos állandó végsebességet úgy, hogy a forrástól elég nagy távolságban a folyadék egyenletes vastag rétegben ömlik alá a lejtőn; a folyadék sebessége a felületen a legnagyobb, a lejtőn nulla (mert — a tapasztalás szerint — csuszamlás nem áll elő, a folyadék tapad a lejtőhöz) iránya pedig mindenütt párhuzamos a legmeredekebb, α hajlású egyenesekkel.

Ennek a stacionär állapotnak, az ú. n. lamelláris mozgásnak megfelelő megoldás a mozgásegyenletekből igen egyszerűen nyerhető.

A hidrodinamika alapegyenletei a szokásos alakban:

$$\begin{aligned} \varrho \frac{du}{dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ \varrho \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \\ \varrho \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w, \end{aligned} \tag{1}$$

a hol ϱ a folyadék sűrűsége, u, v, w a sebességi összetevők, az (x, y, z) pontban t időben; X, Y, Z a térfogategységre mű-



1. ábra.

ködő külső erő komponensei, p a nyomás, μ a belső súrlódási tényező.

Legyen (1. ábra) a lejtő az XY sík, benne az X tengely egy legmeredekebb egyenes, a Z tengely a lejtő felfelé irányított normálisa.

A működö külső erő a nehézségi erő, tehát

$$X = \varrho \cdot g \cdot \sin \alpha, \quad Y = 0, \quad Z = -\varrho \cdot g \cos \alpha \tag{2}$$

továbbá a sebességi komponensek közül

$$v = w = 0 \tag{3}$$

és u csupán a z koordináta függvénye.

Az (1) alatti egyenletek közül a második azonosan ki van elégítve, a harmadik szerint

$$\frac{\partial p}{\partial z} = Z = -\varrho g \cos \alpha$$

$$p = \text{konst.} - \varrho g z \cos \alpha.$$

Legyen a folyadékréteg vastagsága a, a felületen a nyomás p_0, akkor

$$p_0 = \text{konst} - \varrho g a \cos \alpha$$

és így

$$p = p_0 + \varrho g \cos \alpha \, (a - z), \tag{4}$$

azaz a folyadék minden pontjában a nyomás egyenlő a felülettől mért merőleges távolságnak megfelelő hidrostatikai nyomással, a nehézségerőnek csupán a normális komponensét véve tekintetbe.

Az (1) egyenletrendszer első egyenletéből, mivel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

és

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

kapjuk

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\varrho g \sin \alpha}{\mu}. \tag{5}$$

Jelöljük:

$$\frac{\varrho g \sin \alpha}{\mu} = 2\varkappa,$$

akkor (5)-öt integrálva kapjuk

$$u = -\varkappa z^2 + bz + c. \tag{6}$$

A kielégitendő határfeltételek nyilván azok, hogy magán a lejtőn a sebesség nulla, a folyadék felszínén pedig, hogy a belső súrlódásból származó tangenciális erő nulla (a szabad felszín merőleges az összes erők eredőjére), azaz ha

$$z = 0 \text{ akkor } u = 0$$

és ha

$$z = a \text{ akkor } \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Az előzőből következik

$$c = 0,$$

a másodikból

$$-2\varkappa a + b = 0, \quad b = 2\varkappa a$$

s ez értékeket (6)-ba helyettesítve

$$u = 2\varkappa az - \varkappa z^2 \tag{7}$$

a sebesség eloszlását szabályozó egyenlet. További egyszerűsítés kedvéért tegyük

$$a - z = \zeta,$$

azaz vezessük be a folyadékfelülettől mért mélységet, akkor kapjuk

$$u = \varkappa a^2 - \varkappa\zeta^2. \tag{8}$$

Ha $\zeta = 0$, akkor

$$u = \varkappa a^2 = u_0 \tag{9}$$

a felületi sebesség. Ennek felhasználásával (8) még így is írható:

$$u = u_0 - \varkappa\zeta^2. \tag{8a}$$

A lejtő 1 cm szélességén másodperczenként aláömlő folyadék térfogata

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a u\,d\zeta = \varkappa a^2 \int_0^a d\zeta - \varkappa \int_0^a \zeta^2 d\zeta \\ &= \varkappa a^3 - \frac{\varkappa a^3}{3} = \frac{2}{3}\varkappa a^3 \end{aligned} \tag{10}$$

avagy (9) felhasználásával

$$V = \frac{2}{3} u_0 a. \tag{10a}$$

3. A (8), (9) és (10) egyenlet foglalja magában a szóbanforgó jelenség egyszerű törvényszerűségeit, továbbá a belőlük

folyó ($8a$) és ($10a$) egyenletek. A (8) és ($8a$) szerint a sebesség a felülettől mért mélységgel négyzetesen csökken; (9) szerint a felületi sebesség a rétegvastagság négyzetével, a másodperczenként lefolyó folyadékmennyiség (10) szerint ugyanennek harmadik hatványával arányos, végül ($10a$) szerint a folyadékmennyiség csupán kétharmadrésze annak, a mely lefolyna, ha az egész keresztmetszeten a sebesség a felületi, maximális sebességgel egyenlő volna. Közülök a (10) az, a mely a belső súrlódás együtthatójának meghatározására egyszerű s tudtommal új mérési módszert szolgáltat. E szerint ugyanis, ha leömlő folyadékréteg *vastagságát* (a), továbbá a másodperczenként leömlő *folyadékmennyiséget* (V) megmérjük, akkor ebből $\varkappa$, azaz μ meghatározható.

A mennyiségi viszonyokról tájékozást nyerendő, számoljunk keresztül két számpéldát. Ömöljön alá víz egy függőleges $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ lejtőn; erre szobahőmérsékleten $\mu = 0.01\ c.g.s$ s legyen $V = 1 \frac{\text{cm}^3}{\text{cm sec}}$. Ez értékekből kapjuk, hogy

$$\varkappa = 49050, \quad a = 0{\cdot}031 \text{ cm}, \quad u_0 = 48 \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

azaz a víz kereken egy harmadmilliméter vastag rétegben $^1/_2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ felületi sebességgel fog aláömleni.

A második esetben tegyük $\alpha = 1^0$, a többi adat maradjon változatlan; a számítás eredménye:

$$\varkappa = 856, \quad a = 0{\cdot}121 \text{ cm}, \quad u_0 = 12{\cdot}5 \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

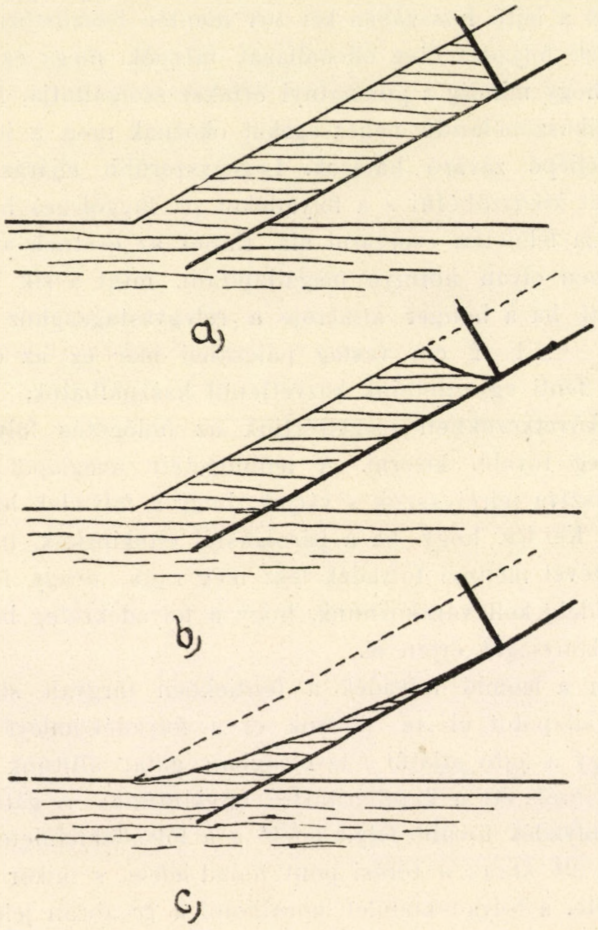
azaz a vízréteg vastagsága körülbelül négyszer akkora, mint előbb (1·2 mm), a felületi sebesség, miután $V = \frac{2}{3} u_0 a =$ konst, természetesen ugyanannyiszor kisebb.

A követendő mérési eljárásra vonatkozólag egyet-mást meg lehet állapitani, még mielőtt tényleges méréseket végeztünk volna. A folyadékot üvegfelületen csorgatnók le, a folyadékréteg vastagságát mikroszkóppal lehetne mérni, nagyon vékony és szabályos rétegét esetleg interferenciás eljárással, avagy végül — vezető folyadékok esetén — elektromos ellenállás mérésből meghatározni. Ez utóbbit úgy gondolom, hogy az üveglapot a lejtő hosszában két sáv mentén beezüstöznők s a kettő közti folyadékréteg ellenállását mérnők meg; ez eljárás előnye, hogy mindig a pillanatnyi értéket szolgáltatja. A mérésekből kiküszöbölendő nehézségeket okoznak még a lejtő két szélén fellépő zavaró hatások. Legegyszerűbb eljárás magát a széleket kiküszöbölni s a folyadékot pl. függőleges hengeres üvegpálcza felületén csorgatni alá. Ennek az esetnek az elméletét éppen olyan könnyű megállapitani, mint a sík lejtőét; egyébként ha a henger átmérője a rétegvastagsághoz képest tetemes — s 1—2 cm vastag pálczánál már ez az eset áll fenn, — fenti egyenleteink közvetlenül használhatók.

4. A következőkben megkísértjük az öblögetés folyamatát elméletileg tovább kísérni. A leöblögetett üveglapot ferdén megtámasztva félretesszük s várjuk, hogy a folyadék lecsorogjon róla. Kérdés, hogy ha a párolgástól eltekintünk, bizonyos idő elteltével mennyi folyadék lesz még rajta, avagy fordítva, mennyi ideig kell várakoznunk, hogy a folyadékréteg bizonyos előírt vékonyságot érjen el.

Miután a leömlő folyadék a fentiekben tárgyalt stacioner mozgási állapotot elérte, állítsuk el a folyadékömlést pl. az által, hogy a lejtő aljától l távolságban gátat állítunk útjába (l. a $2a$ ábrát; itt a kapilláritástól eltekintünk). A gáton alul maradt folyadék tovább folyik lefelé s a folyadékfelületen törés jön létre ($2b$ ábra), a törési pont halad lefelé, s mikor a lejtő alját elérte, a folyadékfelület körülbelül a $2c$ ábrán jelölt alakot veszi fel.

Bizonyos — igen nagy megközelitésben érvényes — feltevések bevezetésével könnyű most már a mozgás további lefolyását meghatározni. Feltesszük, hogy 1. a folyadéksebesség minden pontban a lejtővel párhuzamosnak vehető (tekintettel a réteg kicsiny vastagságára), 2. a mozgás minden pontban és pillanatban azonos a fenti stacionárius mozgással, azaz a fellépő gyorsulások elhanyagolhatók. E feltevések bevezetése után a folyadékmozgás folytonossági egyenlete máris szolgáltatja azt a differenciálegyenletet, a mely a mozgás lefolyását, nevezete-



2. ábra.

sen a rétegvastagságnak a lejtőmenti és időbeli változását szabályozza.

Legyen (3. ábra) x pontban és t időben a folyadékréteg vastagsága $a = a\,(x, t)$, akkor a (10) egyenlet szerint az a keresztmetszeten dt idő alatt beömlik

$$dV = \tfrac{2}{3}\varkappa a^3 dt$$

folyadékmennyiség. A dx távolsággal lejebb fekvő $a + da$ keresztmetszeten ugyanezen idő alatt kiömlik

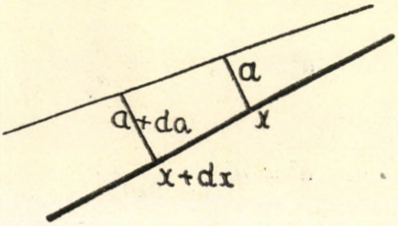
$$dV' = \tfrac{2}{3}\varkappa (a + da)^3\, dt = (\tfrac{2}{3}\varkappa a^3 + 2\varkappa a^2 da)\, dt$$

Mivel a beömlő és kiömlő folyadékmennyiségek nem egyenlők, a folyadékréteg vastagsága az illető pontban dt idő alatt ∂a-val meg fog változni úgy, hogy

$$dV' - dV = -dx\partial a.$$

Az értékeket helyettesítve

$$2\varkappa a^2 da dt = -dx\partial a.$$



3. ábra.

Azonban az értelmezés szerint

$$da = \frac{\partial a}{\partial x} dx; \quad \partial a = \frac{\partial a}{dt} dt$$

s ezeket helyettesítve, a keresett differenciálegyenlet:

$$2\varkappa a^2 \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial t}. \tag{11}$$

A mi esetünkben használható integrálja ennek:

$$\frac{x}{a^2} = r + st.$$

Ugyanis ebből t, illetve x szerint differenciálva

$$-\frac{2x}{a^3}\frac{\partial a}{\partial t} = s; \quad \frac{1}{a^2} - \frac{2x}{a^3}\frac{\partial a}{\partial x} = 0.$$

Szorozva az első egyenletet $\frac{\partial a}{\partial x}$-el, a másodikat $-\frac{\partial a}{\partial t}$-vel s összeadva kapjuk

$$s\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial a}{\partial t},$$

a mi (11)-el azonos, ha

$$s = 2\varkappa,$$

azaz

$$a^2 = \frac{x}{r+2\varkappa t}. \tag{12}$$

Legyen $t = 0$-kor a lejtő alján $(x = l)$ a rétegvastagság a_0, akkor

$$a_0^2 = \frac{l}{r}; \quad r = \frac{l}{a_0^2}$$

és

$$a^2 = a_0^2 \frac{x}{l + 2\varkappa a_0^2 t} \tag{13}$$

s itt még $\varkappa a_0^2 = u_0$ (az a_0 rétegnek megfelelő felületi sebesség) tehető.

Mint látnivaló, a folyadékréteg keresztmetszete parabola; a rétegvastagság az idő négyzetgyökével fordítottan arányosan csökken.

Vegyük például a fentebb számolt első esetet, ahol kereken

$$a_0 = 0{\cdot}3 \text{ mm}, \quad u_0 = 50 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

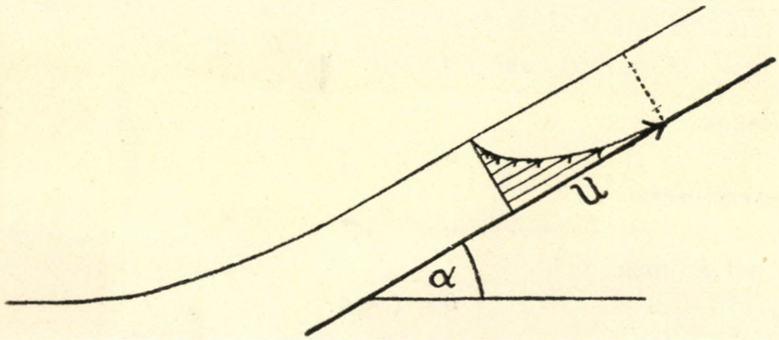
volt s legyen $l = 10$ cm, akkor a lejtő alján a mindenkori rétegvastagság

$$a^2 = a_0^2 \frac{10}{10 + 100\,t} = 9.10^{-4} \frac{1}{1 + 10\,t} \text{ cm},$$

azaz körülbelül 10 mp alatt csökken a rétegvastagság eredeti értékének tizedrészére; $a = 0{\cdot}01$ mm lesz 15 percz mulva,

$a = 0{\cdot}001$ mm pedig 1 nap és 1 óra alatt, tehát ugyancsak hosszú idő mulva.[1]

5. A lejtőn való lecsorgás egyenletéből megkiséreljük még a következő feladat megoldását is kiolvasni. Mennyi folyadékot emel ki magával másodperczenként valamely folyadéktartályból a belőle felmerülő, saját síkjában u sebességgel felfelé mozgó, α hajlásszögű lejtő? (4. ábra.)



4. ábra.

Megint beérjük a folyadéktartálytól végtelenül messzeeső helyen beálló stacionär állapot ismeretével. Tegyük (7) alapján

$$u = 2\varkappa a z - \varkappa z^2 - U, \tag{14}$$

a hol azonban a, a rétegvastagság egyelőre még határozatlan, akkor ez megoldása lesz a differenciálegyenletünknek, eleget tesz a határfeltételnek is, mert

$$\text{ha } z = 0 \quad u = -U$$

és

[1] Egy izben optikai kisérletezéshez igen vékony, szabályosan változó vastagságú (ékalakú) átlátszó lemezre lévén szükségem, oly módon kiséreltem meg ilyet előállítani, hogy négyszegletes sík üveglemezre egyik éle mentén cédrusolajat kentem fel s az üveglemezt, emez élével felfelé, ferdén megtámasztva hagytam. Egy nap leforgása után a lemezen homogén Na fényben vizszintes interferencia csikok voltak láthatók (a törésmutatók kicsiny különbsége folytán persze gyengén), jeléül annak, hogy a cédrusolaj tényleg ilyen réteg alakját vette fel; a csiktávolságok mérésével a réteg alakja közvetlenül megállapítható.

$$\text{ha } z = a \quad \frac{\partial u}{\partial a} = 0,$$

azaz a lejtőn magán a folyadék U sebességgel mozog felfelé; ellenben az a meghatározása minden további nélkül nem lehetséges.[1]

Avval az igen valószínű feltevéssel élve, hogy a felületen a sebesség zérus,[2] kapjuk megint, hogy

$$\varkappa a^2 = U; \quad a = \sqrt{\frac{U}{\varkappa}}$$

s ismét

$$a - z = \zeta$$

bevezetésével

$$u = -\varkappa\zeta^2, \tag{15}$$

a hol azonban

$$0 \leqq \zeta \leqq a.$$

A másodperczenként kiemelt folyadékmennyiség

$$W = \int_0^a u d\zeta = \frac{1}{3}\varkappa a^3 = \frac{1}{3}U \cdot a = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{U^3}{\varkappa}}, \tag{16}$$

azaz a felmerülés sebességének $^3/_2$-ik hatványával, a belső súrlódás együtthatójának $^1/_2$-ik hatványával arányos. Egyébként

$$W = \tfrac{1}{2}V,$$

a mint az az 1. és 4. ábra összevetéséből is (a parabolaív ismert tulajdonsága szerint, hogy a belső és külső területek 2 : 1 arányban állnak) következik.

6. A technológia különböző ágaiban, pl. festékek, ragasztóanyagok felkenésére használnak oly berendezést, a mely lényegében egy, a folyadékba bemerülő, vízszintes tengelyű hengerből

---

1 Most t. i. éppen a folyadékmennyiséget keressük, holott fentebb ez az a meghatározására szolgáló, adott mennyiség volt.

2 Már azért is, mert a stacionär állapotban a sebességnek egy más, kitűntetett értéke alig gondolható el.

áll; ez forgásba hozva, a folyadékot magával kiemeli s a bevonandó felületre viszi. Ha a henger sugarát, helyesebben annak viszonyát a kerületi sebességhez, végtelen nagynak vehetjük fel, akkor a fenti eredményt reá közvetlenül alkalmazhatjuk. Legyen n a másodperczenkénti fordulatszám, R a henger sugara, h a hossza s merüljön a henger a folyadékba éppen félig belé, akkor

$$U = 2n\pi R$$

és

$$a = \frac{\pi}{2} \text{ lévén,} \quad \varkappa = \frac{\varrho g}{2\mu}$$

úgy, hogy

$$W = h \cdot \frac{4}{3} \sqrt{\frac{n^3 R^3 \pi^2 \mu}{\varrho \cdot g}}.$$

Érdekes lenne ennek a helyességét is kíséletileg ellenőrízni. Valószínű, hogy kísérletileg ennél mindig nagyobb értékeket találnánk, mert a folyadék csupán kezdetben mozog függőleges lejtőn, később a lejtő hajlásszöge egyre csökken, mintegy kevésbbé akadályozza tehát a kiemelkedő folyadékrészeket. A henger kerülete mentén egyébként a sebességeloszlás is, a felületi sebesség s a rétegvastagság is változik, miután $\varkappa$ a benne foglalt $\sin \alpha$ tényező szerint változó mennyiség. Az a mindenkori értékének meghatarozására a (14)-ből következő

$$\int_0^a u dz = \frac{2}{3} \varkappa a^3 - Ua = W = \text{konst.}$$

egyenlet szolgál. Megemlítésre érdemes az $\alpha = 0$ azaz $\varkappa = 0$ esete, ekkor

$$W = U \cdot a_0,$$

a miből látni, hogy a henger legfelső alkotója mentén a folyadék egész tömegében U sebességgel mozog; továbbá az $\alpha = \frac{\pi}{2}$ hajlású felületelem, a melyen (16) szerint

$$W = \frac{1}{3} U \cdot a_{\frac{\pi}{2}},$$

a miből

$$a_{\frac{\pi}{2}} = 3 \cdot a_0,$$

azaz a folyadékréteg vastagsága ott, a hol a henger a folyadékból kiemelkedik, háromszor akkora, mint a henger legfelső alkotója mentén.

Selényi Pál.

A SUGÁRZÁSI FORMULA ELŐÁLLÍTÁSA A BOLTZMANN-FÉLE ENTROPIAFOGALOM NÉLKÜL.

Az entropiának, mint valószinűségi mennyiségnek kifejezése BOLTZMANN-tól származik s a következőleg állítható elő:

$$S = k \cdot \log W, \tag{1}$$

hol k az ismert gázelméleti konstans, W pedig az állapotnak, a melyben lévő rendszer entropiájáról szó van, thermodinamikai valószínűsége. A jobb oldalról az ismeretlen konstanst a «quantumhipothezis» értelmében elhagytuk. A quantumhipothezis megkülönböztetendő a «quantumtheoriá»-tól, mert míg az előbbi véges és meghatározott nagyságú valószínűségi tartományok létezését jelenti, addig az utóbbi diszkrét energiaquantumok existenciájára vonatkozik. Bizonyos tekintetben azonban a kettő egymással összekapcsolódik.

PLANCK mindkét elméletében erősen kihasználja az (1) összefüggést. Az ő I. feltevése, vagyis *a discontinuus absorpcio és emisszio* alapján — azonban az (1) egyenlet felhasználása nélkül — először A. EINSTEIN[1] származtatta le a sugárzási formulát. Majd pedig NERNST[2] állította ezt elő kissé más formában, de ugyanazon alapokon; az ő tárgyalási módját röviden SOMMERFELD[3] foglalja össze. Fontos dolog, hogy ők mindnyájan felhasználják a nevezetes

$$\overline{U} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2} u \tag{2}$$

---

[1] EINSTEIN: Ann. d. Phys. 1907., 22. k., 180. o.
[2] NERNST: Zeitschr. f. Elektrochemie 1911., 7. szám.
[3] SOMMERFELD: Phys. Zeitschr. 1911., 2. k., 1058. o.

PLANCK-féle összefüggést egy oscillátor középenergiája ($\bar{U}$) és a sugárzó energia sűrűsége (u) között, mely — mint ismeretes — a discontinuitási feltevésekkel ellentétben áll. Újabban PH. FRANK[1] is adott egy levezetést HASENÖHRL[2] nyomán, de más úton, mint a melyet követni fogunk.

Czélunk a sugárzási formulát *a II.* PLANCK-*féle feltevés alapján is* (melyet explicite ki fogunk mondani) a BOLTZMANN-féle entropiafogalom és az utóbb említett PLANCK-féle formula felhasználása nélkül előállítani; az így nyert levezetés aztán a mellett, hogy független az (1) egyenlettől, csak az emisszio discontinuitását teszi szükségessé és ellentmondást nem tartalmaz.

Ama feltevéseket és megállapodásokat, melyekre támaszkodni fogunk, a következőkben foglalhatjuk össze.

1° A sugárzást vizsgáljuk egy zárt ürben, melyben thermodinamikus egyensúly uralkodik. Ennek fennállását a sugárzás forrásai gyanánt szolgáló oscillátorok energiabeli állapotára vonatkozólag az által óhajtjuk kifejezni, hogy az energiaeloszlást az oscillátorok között az egész folyamat alatt változatlannak tekintjük, vagyis felveszszük, hogy *a thermodinamikai egyensúly egy pontosan meghatározott energiaeloszlással van kitüntetve.* Az egyes oscillátorok energiája persze változhatik, de ez a változás csak abban áll, hogy egymással szerepet cserélnek. Eme körülményből kifolyólag az oscillátorok működését végeredményben egymástól függetlennek tekinthetjük és felvehetjük, hogy a thermodinamikus egyensúly alatt állandóan N azon oscillátorok száma, melyek ν rezgésszámmal birnak s ezen N oscillátort a többiektől függetlenül tárgyalhatjuk. Megjegyzendő, hogy csak lineáris oscillátorokra szorítkozunk (melyeknek két szabadsági foka van) s az egész tárgyalást, mint egyik komponensre vonatkozót fogjuk fel. Az «oscillátor közép-

---

[1] PH. FRANK: Phys. Zeitschr. 1912., 1. k. 506. o.
[2] HASENÖHRL: Phys. Zeitschr. 1911., 2. k. 934. o.

energiá»-ja kifejezés a tulajdonképeni energia 3-ad részét jelenti.

2° A II. PLANCK-féle alapfeltevés: az oscillátorok *continuusan absorbeálják* a rájuk eső energiát, azonban csak akkor emittálhatnak, ha energiájuk az $\varepsilon = h\nu$ energiaquantumnak egészszámú többszöröse és ekkor összes energiájukat exploziv módon kiadják. *Az emisszio tehát discontinuusan történik.* Míg az I. PLANCK-féle feltevés alapján az oscillátorok energiája csak

$$0.\varepsilon, \; 1.\varepsilon, \ldots n.\varepsilon$$

lehetett, addig most az oscillátorok bármilyen energiabeli állapotban lehetnek, vagyis egy oscillátor energiája általában

$$n + \varepsilon\varrho,$$

hol

$$n = 0, \; 1, \; 2, \ldots$$
$$0 \leqq \varrho \leqq \varepsilon.$$

3° Az (1) alatti összefüggést természetesen pótolni kellett s erre szolgál a MAXWELL-féle (sebességre vonatkozó) eloszlási törvénynek egy általánosítása, mely NERNST-től[1] származik. Ő — hogy a lineáris oscillátorokkal teljes analogiát teremtsen — két szabadsági fokkal biró gázt vesz fel s az eredeti sebességre vonatkozó MAXWELL-törvény alapján megállapitja, hogy az E és $E + dE$ energiaintervallumban lévő molekulák száma így fejezhető ki:

$$dN = NAe^{-\frac{E}{kT}}dE, \tag{3}$$

hol A konstans. Ezt a formulát az oscillátorok esetében is érvényesnek veszszük fel s az A értékét az energiafelvétel és kiadás természetének megfelelőleg fogjuk megállapitani. Ez az összefüggés tulajdonképen az egész tárgyalás alapját képezi.

Megjegyzendő, hogy ezt, illetőleg az ennek alapjául szolgáló MAXWELL-féle formulát a BOLTZMANN-féle entropiafogalom alap-

[1] NERNST: Loc. cit.

ján is elő lehet állítani,[1] s így esetleg arra lehetne gondolni, hogy implicite felhasználtuk az (1) összefüggést; azonban ha tekintetbe veszszük, hogy a MAXWELL-formulát ezenfelül a thermodinamikai egyensúly feltétele mellett — nemcsak az (1) mellőzésével, hanem ezenkívül még az entropia maximális voltának kihasználása nélkül — csupán valószínűségszámítási meggondolások alapján le lehet vezetni, nyilvánvaló lesz a következőknek az (1)-től való függetlensége. Lehet azonban úgy is felfogni a viszonyokat, hogy az (1) egyenlet helyébe egyszerűen a (3) alattit teszszük, *mint annak egyik következményét* s így egyszerű úton juthatunk a sugárzási formulához.

A mondottak alapján elő fogjuk állítani egy oscillátor középenergiáját.

Első feladatunk az általánosított MAXWELL-féle formula konstansát meghatározni. E czélból lényegesen kihasználjuk a 2° feltevést, melyből thermodinamikai egyensúly esetén (1°) rögtön következik, hogy egy ε nagyságú energiaintervallumban az oscillátorok eloszlása *egyenletes*, vagyis az

$$n\varepsilon + \varrho - d\varrho \quad \text{és} \quad n\varepsilon + \varrho$$

elemi energiaközben levő oscillátorok száma egyenlő az

$$n\varepsilon + \varrho \quad \text{és} \quad n\varepsilon + \varrho + d\varrho$$

közben lévők számával, mert dt idő alatt, mely $d\varrho$ energiafelvétellel jár, az utóbbi közbe csak azok léphetnek be, melyek előbb az elsőben voltak, mert hiszen egy

$$(n - k_1)\,\varepsilon + \varrho_1$$
$$(\text{hol } k_1 \geqq 0 \quad \text{és} \quad \varrho_1 < \varrho - d\varrho)$$

energiával biró oscillátor dt idő alatt nem vehet föl annyi energiát, hogy a jelzett közbe jusson, mivel az energiafelvétel az idővel arányosan történik;[2] másrészről egy

---

[1] [2] PLANCK: Wärmestrahlung II. kiad. 127. és 155. o.

$$(n + k_2)\,\varepsilon$$
$$(\text{hol } k_2 \geqq 1)$$

energiával biró oscillátor meg csak az egész energiáját adhatja ki s így ismét nem léphet be a jelzett közbe.

Ennek folytán az n-ik energiaintervallumban ($n\varepsilon$-tól $(n+1)\,\varepsilon$-ig) bármelyik $d\varrho$ nagyságú közben lévő oscillátorok száma az általánositott MAXWELL-törvény alapján:

$$dN = NAe^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}d\varrho.$$

A különböző energiaintervallumokban természetesen ez a szám más és más lesz.

Már most az n-ik intervallumban lévő oscillátorok száma:

$$N_n = \int_0^\varepsilon dN = NA\int_0^\varepsilon e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}d\varrho = NA\varepsilon e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}.$$

Az összes oscillátorok száma (ν rezgésszámúak):

$$N = NA\varepsilon\sum_0^\infty e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}} = NA\frac{\varepsilon}{1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}},$$

melyből

$$A = \frac{1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{\varepsilon}.$$

Még egyszer megjegyezzük, hogy az A konstans ilyen értéke annak a következménye, hogy az oscillátorok száma *egy véges energiaintervallumban* lévő bármely $d\varrho$ közben ugyanakkora. A folytonos emisszio és absorpcio esetén ezt nem mondhatjuk.

Fennáll tehát:

$$dN = N\left(\frac{1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{\varepsilon}\right)e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}d\varrho.$$

Ezek után felírhatjuk az összes N oscillátorok energiáját:

$$U = N\left(\frac{1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{\varepsilon}\right)\sum_0^\infty \int_0^\varepsilon (n\varepsilon+\varrho)\, e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}\, d\varrho,$$

melyből az integráció elvégzése és a kifejezés rendezése után:

$$U = N\left(1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right)\varepsilon\sum_0^\infty\left(ne^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{n\varepsilon}{kT}}\right).$$

Az összegezés elvégzése céljából legyen:

$$e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = x.\text{[3]}$$

Ekkor

$$\sum_0^\infty nx^n = x(1+2x+3x^2+\cdots) = x\frac{d}{dx}(1+x+x^2+\cdots)$$

$$= x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ezt felhasználva nyerjük:

$$U = N\left(1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right)\varepsilon\left(\frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{\left(1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}\right).$$

És végül:

$$U = N\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{1-e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}\right).$$

Egy oscillátor középenergiája tehát:

$$\overline{U} = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1} = \frac{h\nu}{2}+\frac{h\nu}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}. \qquad (4)$$

Ez a középenergia teljesen megegyezik az újabb PLANCK-féle elméletben a quantumhipothezis eredményével, míg az EINSTEIN-

---

[3] Általában: $e^{-\frac{2}{kT}} < 1$.

NERNST-féle előállitásban, hol — mint már jeleztük — az emiszszio mellett még az az absorpcio is discontinuusan történik, a $\frac{h\nu}{2}$ tag hiányzik. A quantumhipothezis elég hosszú úton vezet az itt egyszerűen elért eredményre.

Most még csak egészen röviden óhajtom vázolni az utat, melyen a sugárzási formulához juthatunk.

Ugyancsak a BOLTZMANN-féle entropiafogalom felhasználása nélkül, csupán a 2° hipothézis alapján nyerhető, hogy

$$\overline{U} = \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right),[1] \tag{5}$$

hol η az emisszio bekövetkezésének valószínűségét jelenti azon időpillanatban, mikor egyes oscillátorok energiája épen $n\varepsilon$.

Hogy a befejező lépést megtehessük, egy újabb feltevésre van szükség, mely a (2) egyenlet pótlására szolgál és melyet PLANCK a következőleg vezetett be:[2]

4° Az emisszio be nem következésének és bekövetkezésének valószínűségéből alkotott hányados arányos az oscillátort érő sugárzás intenzitásával;

$$\frac{1-\eta}{\eta} = p \, . \, I_\nu,$$

hol

$$I_\nu = \frac{32\pi^2}{3c} K_\nu$$

és K_ν a ν rezgésszámú sugárzás specifikus intenzitása. A p konstans határesetben a RAYLEIGH-féle formula segélyével — melyet szintén a BOLTZMANN-féle entropiafogalomtól függetlenül elő lehet állítani — meghatározható:[3]

$$p = \frac{3c^2}{22\pi^2 h\nu^3}.$$

[1] [2] PLANCK: Loc. cit. 159. és 149. o.

[3] WIEN: Columbia-Vorlesungen 1913., 27. o.

A kellő helyettesitések után:

$$\overline{U} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{c^2}{\nu^3} K_\nu. \tag{6}$$

Összekapcsolva ezt a (4) egyenlettel:

$$K_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{k\nu}{kT}} - 1}, \tag{7}$$

mely az ismert Planck-féle formula.

Tomits Iván.

PHYSIKAI SZEMLE.

A. Einstein és J. W. de Haas. Az Ampère-féle molekuláris áramok kisérleti kimutatása. (Berichte der deutschen physikalischen Gesellschaft 17. 152—170. 1915.)

Oerstedt kisérletei alapján ismeretes, hogy egy körvezetőben keringő elektromos áramnak mágneses hatása van és hogy ez áram e mágneses hatásában minden tekintetben helyettesíthető oly permanens mágnessel, mely mágnes momentumának iránya a körvezető pozitiv normálisával esik egybe és nagysága az áram (elektromágneses mértékrendszerben mért) intenzitásának i-nek és az áram által körülfolyt felületnek f-nek szorzatával egyenlő:

$$\mathfrak{m} = i \, . \, f.$$

Ez a körülmény, hogy a körvezetőben keringő elektromos áram és a permanens mágnes, ha közöttük a fenti vonatkozás áll fenn, teljesen identikus mágneses erőteret létesít, arra késztették Ampère-t, hogy e két jelenségnek egy és ugyanazon eredetet tulajdonítson. E czélból Ampère azt a hipothezist állította fel, hogy a permanens mágnes molekuláiban elektromos áramok keringenek. Minden egyes ily elektromos áramkör az Oerstedt-féle kisérleti tapasztalat szerint mágneses momentumot kelt, miért is minden egyes molekulának mágneses momentuma van, azaz a permanens mágnes mágneses molekulákból van összetéve. E molekulák momentumainak eredője a permanens mágnes momentuma. Eme kis elektromos áramokat, melyeket a permanens mágnes molekuláiban keringőknek kell feltételeznünk, hogy segítségükkel a mágnes mágneses tulajdonságai magyarázhatók legyenek, szerzőjüknek nevéről *Ampére-féle molekuláris áramok*-nak nevezzük.

Ez Ampère-féle felfogás csekély változtatással mindmaig megmaradt. Lorentz az elektronhipothezis bevezetője és az elektronelmélet kifejtője az Ampère-féle molekuláris áramok értelmezésére azt a hipothezist vezette be, hogy a mágnes molekuláiban az elektronok között vannak olyanok is, melyek körpályán állandó szögsebességgel keringenek. Minden egyes ily elektron elektromos töltését transportálja, minek következtében a molekulákban elektromos áram jön létre. Jelölje ε az elektron (elektromágneses mértékrendszerben mért) elektromos töltését, n a másodperczenkinti keringések számát, akkor az áram intenzitása:

$$i = \varepsilon \,.\, n.$$

Minden egyes keringő elektron ezek szerint mágneses momentumot létesít, melynek értéke

$$\mathfrak{m} = \varepsilon \,.\, n \,.\, f. \tag{1}$$

Látható tehát, hogy az Ampère-féle molekuláris áramok hipothezisének bevezetésével a mágnes mágneses tulajdonsága egyszerűen és jól magyarázható. Mindazonáltal vannak tapasztalati tények és mélyreható elméleti következtetések, melyek e hipothezis megválasztásakor gondolkozóba ejtenek bennünket.

Kivánatos tehát, hogy az Ampère-féle molekuláris áramok existentiájának kérdése vizsgálat tárgyává tétessék. Ezt a czélt tűzték ki Einstein és Haas ama dolgozatukban, melynek tartalmát az alábbiakban ismertetni óhajtom.

Lássuk mindenekelőtt azt a gondolatot, mely e dolgozat alapját képezi.

Vegyük fel e czélból, hogy egy μ tömegű pont r sugarú körpályán kering. Jelölje ω e tömegpont mindenkori szögsebességét, F a szöggyorsulást létesítő forgató nyomatékot, akkor e tömegpont mozgásegyenlete:

$$\mu r^2 \frac{d\omega}{dt} = F.$$

Az F iránya a körpálya pozitiv normálisával esik egybe. Ez egyenletetet integrálva nyerjük, hogy

$$\mu r^2 \omega = \int F dt + C = \mathfrak{M}. \tag{2}$$

Az $\mathfrak{M}$ mennyiség, miként az egyenletből kiolvasható, vektormennyiség. E vektor iránya a körpálya pozitiv normálisa, értéke pedig ép oly vonatkozásban áll a forgatónyomatékhoz képest, mint a minőben van az impulziverő az erőhöz képest. Ez okból ez $\mathfrak{M}$ mennyiséget *impulziv-momentum*nak nevezzük.

Ha a μ tömegpont állandó szögsebességgel mp-kint n-szer kering, akkor az impulzivmomentum értéke

$$\mathfrak{M} = \mu r^2 2\pi n = 2\mu n f. \quad (3)$$

Ha tehát egy elektron (melynek tudvalevőleg úgy elektromos töltése ε mint tömege μ van) körpályán kering, akkor egy mágneses momentum és egy impulzivmomentum létezik. E két vektor iránya összeesik, értékét pedig az (1) és (3) alatti egyenletek nyújtják. Ez egyenletekből az $n.f.$ eliminálásával nyerjük, hogy

$$\mathfrak{M} = 2\frac{\mu}{\varepsilon}\mathfrak{m}.$$

S ha most feltételezzük, hogy a permanens mágnes molekuláiban keringő elektronok speczifikus töltései $\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)$ egyenlők, akkor arra jutunk, hogy a mágnes eredő impulzivmomentuma $\Sigma\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ és eredő mágneses momentuma $\Sigma\mathfrak{m} = J$ egyirányúak és az

$$\mathfrak{M} = 2\frac{\mu}{\varepsilon}J$$

összefüggés alapján egymással oly viszonyt képeznek, melyben sem az elektronok körülfutásának száma, sem pedig a mágnes geometriai alakja nem szerepel. Az elektron speczifikus töltésének más kisérleti meghatározások útján ismeretes értékét $\frac{\varepsilon}{\mu} = -1{,}77.10^{+7}$ (elektromágneses egység) helyettesítve

$$\mathfrak{M} = -1{,}13.10^{-7}J.$$

Tegyük fel most már azt, hogy a mágnes momentumát megváltoztatjuk. E momentum értéke a fenti hipothezis alapján csak akkor változhat meg, ha az elektronok mp-kénti keringésének száma megváltozik, azaz, ha az elektronra egy belső forgatónyomaték hat. E forgatónyomaték iránya merőleges a körpálya síkjára s nagysága (2) egyenlet szerint

$$F = \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t}.$$

De ismeretes, hogy az impulzivmomentum értékét (mint pl. a pörgettyűnél) megtartani törekszik; miért is kell, hogy e belső forgatónyomaték fellépésével egy időben egy azzal ellentétes, külső, mechanikailag nyilvánuló forgatónyomaték is lépjen fel, melynek értéke:

$$\vartheta = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = +1{,}13.10^{-7}\frac{\partial J}{\partial t}\cdot$$

Eredményeinket tehát a következőkben foglaljuk egybe: *Ha a mágnes mágneses tulajdonságát keringő elektronok okozzák, akkor a mágnes momentumának megváltoztatásakor egy forgatónyomatéknak kell keletkeznie, mely a mágnest, ha lehetséges, elforgatja.*

Ez elmélet helyességének kisérleti megvizsgálása czéljából Einstein és Haas 7 cm hosszú 1·8 mm átmérőjű lágy vashengert egy vékony üvegszálon egy tekercs belsejébe függesztettek oly módon, hogy a henger tengelye lehetőleg pontosan a tekercs tengelyével essék egybe. A tekercs akként volt tekercselve, hogy az abban keringő elektromos áram a lágyvas-hengert tengelye irányában mágnesezze. A tekercsbe váltakozó irányú áramot vezettek.

Az áram minden irányváltozásánál az előzőek szerint egy-egy rövid-ideig tartó forgatónyomaték lép fel, mely a lágyvas hengert felfüggesztési tengelye körül elforgatni törekszik. Eme egyes, rövid ideig tartó forgatónyomatékok által létesített kilengéseket a lengő szerkezet rezgésidejének alkalmas megválasztásával, resonantia segítségével, multiplikálták. A multiplikált amplitudót kisérletileg meghatározták és a lengő szerkezet mozgását meghatározó adatok segitségével kiszámították. Az észlelt és a számított értékek között igen jó megegyezést találtak.

Ugyancsak kisérleti úton, a ϑ forgatónyomaték előjelének meghatározásával eldöntötték azt is, hogy a molekulákban keringő elektromos quantumok töltése negativ előjelű, azaz, hogy a molekulákban tényleg elektronok keringenek.

A dolgozat eredményét ezek után a következőkben foglalom egybe: Einstein és Haas kiindulva abból a feltevésből, hogy a mágnes mágneses tulajdonságát Ampère-féle molekuláris áramok okozzák, oly következtetésekhez jutottak, melyek a tapasztalattal jól egyeztek. Téves volna azonban a szép egyezés alapján azt állítanunk, hogy e dolgozat Ampère-féle molekuláris áramok existentiáját bizonyítja. E dolgozat csupán azt igazolja, hogy az említett kisérleti tapasztalatok e hipothezissel jól magyarázhatók.

Dr. Rybár István.

Az északi fény és a földmágnességi háborgások.

KR. BIRKELAND (The Norwegian Aurora Polaris Expedition 1902—3. Vol. I. 1st (315 lap), 2nd Section. (801 lap). Christiania 1908 és 1913. Számos rajzzal és rajzmelléklettel.)

BIRKELAND az északi fény és a földmágnességi haborgások tanulmányozására az 1896—1903. években három ízben szervezett expedicziót az északi sarkvidékre. Az első és második expediczió (1897 február és márczius hónapokban, illetve 1899 szept.—1900 ápr.) eredményei BIRKELANDnak egy előbbi munkájában [1] jelentek meg, a harmadik expediczió eredményei az előttünk levő két vaskos kötetben kerülnek nyilvánosságra. E két kötet azonban jóval többet tartalmaz, mint a menynyit czíme után várnánk, mert magában foglalja azon elméletnek kísérleti alapjait és messzemenő következményeit, melyet szerző 1896-tól kezdve az északi fény és földmágneses háborgások megmagyarázására számos dolgozatban kifejtett; ennélfogva a földmágnességi háborgások ismeretéhez rendkívül becses adatokat nyújt, a mennyiben az 1902—3. évekből 21, az 1882—83. évekből (az úgynevezett poláris évből) 8 háborgásnak részletes feldolgozását tartalmazza, továbbá az elméletnek alkalmazását fejti ki kozmogoniai kérdésekre, a földáramoknak és a földmágnességi erő változásainak kapcsolatára stb.

Szerző elméletének alapgondolata az, hogy a Napból jövő elektromos töltésű részecskék, melyek elég közel jutnak Földünkhöz, egyrészt világítóvá teszik a légkör legfelső rétegeit — és így az északi fényt okozzák, másrészt nagy sebességük folytán elegendő nagy elektromágneses hatást okozhatnak a Földön és ezt a hatást földmágnességi háborgások alakjában észleljük.

Az 1902—3-iki expediczió egyidejű állomásai voltak:

Kaafjord (Finnországban, $\varphi = 69°56'$ é. sz., $\lambda = 22°\ 58'$ GREENWICH-től keletre).

Dyrafjord (Island $\varphi = 66°\ 15'$, $\lambda = 22°\ 30'$ Gr. nyug.).

Axelöen (Spitzbergák $\varphi = 77°\ 41'$, $\lambda = 14°\ 50'$ Gr. kel.).

Matotschkin Schar (Novaja Semlja $\varphi = 73°\ 17'$, $\lambda = 53°\ 57'$ Gr. kel.).

Az e helyeken regisztráló mágneses variometerek szolgáltatta adatoknak az egész Földön elosztott más 23 obszervatórium adataihoz való kapcsolása a földmágnességi háborgásoknak széles alapon való tárgyalását tette

---

[1] Expédition Norvégienne de 1899—1900 pour l'étude des aurores boréales par Kr. BIRKELAND. Videnskabs Selskabets Skrifter 1901. Nr. 1.

lehetővé és a háborgások néhány olyan jellemző vonásához vezetett, melyek a háborgások magyarázására a BIRKELAND-féle felfogás alapján új egységes szempontot nyitnak meg.

Ha mágnesezett gömböt kathodsugarak útjába helyezünk, akkor ez utóbbiak a gömb mágnesezettségéhez mért viszonylagos keménységük foka és kezdetirányuk különbözősége szerint különböző pályákat írnak le. A jelenség elméleti tárgyalását STÖRMER végezte,[1] kísérleti vizsgálatát BIRKELANDnak köszönjük. Képzeljük a mágnesezett gömb helyébe a Földet az ő permanens mágneses terével, a kathódsugarak helyébe a Napból jövő elektromos töltésű részecskéket. E részecskéktől befutott pályák között vannak olyanok, melyek közel jutnak a Föld felületéhez és ezek a két mágneses pólus körül áramlanak be, itt északi fényt és a földmágnességi háborgások egy bizonyos nemét, az úgynevezett poláris mágneses háborgást okozzák. E háborgás jellemzője, hogy főkép a poláris vidékeken érezhető. A háborgató erőtér nagy analógiát mutat oly külső áramrendszer erőteréhez, mely két vertikális ágból és egy ezeket összekötő horizontális ágból áll. A szerint, a mint a horizontális ágban az áram iránya nyugat—keleti vagy fordított irányú, az úgynevezett pozitív (hor. intenzitást növelő) és negatív (hor. intenzitást csökkentő) poláris háborgás sémáját kapjuk. A pozitív poláris háborgás főkép a Föld azon felében jelentkezik, a hol délután van, a negatív háborgás az éjjeli oldalon. Ily áramrendszer helyettesítheti a poláris vidékeken beáramló elektromos részecskék hatását. Azon pályák, melyekben — STÖRMER vizsgálatai szerint — az elektromos részecskék a pólust megközelítik, a mágneses erővonal körül fonódó spirális vonalak. Ezeknek összesége — BIRKELAND szerint — a Föld felületén oly elektromágneses hatást fejt ki, mint az előbbi egyszerű séma. A földmágnességi háborgásoknak másik fajtája az úgynevezett æquatoriális háborgás, mely főkép alacsonyabb sarkmagasságban erős és erőssége az æquatortól való távolsággal fogy. Ily háborgás oly pályákon mozgó elektromos részecskékkel magyarázható, melyek a Földet az æquator körül (æquator alatt az első közelítésben homogén mágnesezettségűnek képzelt Föld mágneses æquatora értendő) kisebb-hosszabb útdarabon megközelítik, vagy bizonyos határesetben az æquatort körülvevő körök. E háborgások is lehetnek pozitívek és negatívek a szerint, a mint a horizontális intenzitást növelik vagy

[1] Sur les trajectoires des corpuscules electrisés dans l'espace etc. Arch. Sc. Genève Juillet. Oct. 1907.

csökkentik. Ezeken kívül van a háborgásoknak még egy ritkábban fellépő fajtája, az úgynevezett cyclo-median háborgás, melynek elektromágneses erőtere hasonló a poláris háborgások erőteréhez, de alacsonyabb sarkmagasságban lép fel. Ezt az osztályozást az 1902—3 évekből 21, az 1882—83. évekből 8 nagyobb háborgásnak analizise illusztrálja.

Birkeland alapgondolatának kozmológiai jelentőségét azon kísérletek igazolják, a melyekben a kathod mágnesezett gömb. E kísérletekben fellépő fényjelenségek megfelelő analógiát mutatnak több kozmikus jelenséghez: napfoltokhoz, Saturnus gyűrűjéhez, az üstökösök csóvájához, az állatövi fényhez stb. Ezek az analógiák oly elektromos kozmogóniai elmélethez vezetnek, mely a nehézségerő mellett mindenütt uralkodó elektromos erőt is tételez fel, és ez az anyag szétszóródását segíti elő. Mathematikai megfontolások azt mutatják, hogy ily módon a spirális ködök kialakulása, a bolygók keletkezése egy központi Nap körül, a Saturnus gyűrűjéhez hasonló alakulások, a holdak keletkezése a bolygók körül stb. megmagyarázhatók. E felfogás szerint a középponti égitest mágnesezettségének eredete a belőle kilövelt és körülötte nagy sebességgel keringő elektromos részecskék mágnesező hatására volna vezetendő.

A földáramoknak kapcsolata a földmágnességi erővel háborgások alkalmával és a normális napi menetben, a norvég expedicziókon és másutt nyert megfigyelési adatok alapján beható tárgyalásban részesül és az eredményeket a szerző a tőle felállított elméletből folyó szempontok körül csoportosítja.

Birkeland műve a földmágnességre és a vele rokon jelenségekre vonatkozó irodalom legkimagaslóbb terméke az utóbbi években és nagy érdeklődéssel várjuk a mű folytatását, melyet szerző kilátásba helyez.

Dr. Steiner Lajos.

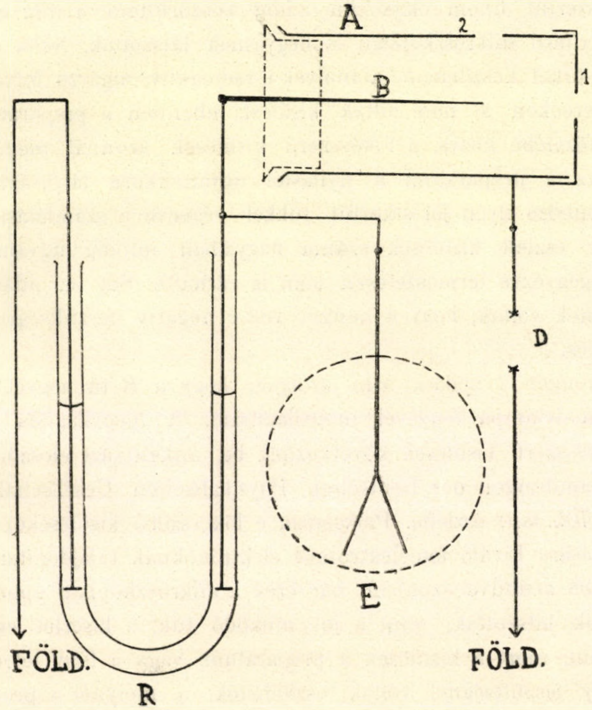
Radioaktiv részecskék számlálása. A radioaktiv preparátumoktól kilövelt α-részecskék számlálásának legrégibb módja a szcintilláció ismert jelenségén alapul. Ha kristályos cinkszulfid-réteggel bevont csillámlemezke alá radioaktiv preparátumot helyezünk, úgyhogy a sugárzás a réteget közvetlenül érje, akkor lupeval nézve, azt tapasztaljuk, hogy a réteg legkülönbözőbb pontjai sűrű egymásutánban felvillanak. Ezt a jelenséget, a melyet különböző tapasztalatok alapján az

α-sugárzásnak kell tulajdonítanunk, többen felhasználták az α-részecskék számlálására.

Rutherford és Geiger (Physikalische Zeitschrift, 1909, 10. kötet, 1. lap) abból a célból, hogy eldöntsék, hogy tényleg minden egyes felvillanás egy-egy különálló α-részecskének tulajdonítható-e, a számlálásra más eljárást dolgoztak ki. Erre hengerkondenzátort használtak, a melynek egyik fegyverzete fémhenger volt, a másik pedig a henger tengelyében kifeszített fémdrót. A két fegyverzet közt 1320 volt feszültséget állítottak elő, úgy hogy a kondenzátor gázterén gyenge áram hatolt át. Ha a kondenzátor kis nyilásán át a két fegyverzet közé egy α-részecske jut, akkor ott növeli a gáz ionizációját; ez a hatás a nagy feszültség folytán mindannyiszor megsokszorózódik, a mennyiben az α-részecske keltette ionok oly nagy sebességre tesznek szert, hogy maguk is ionizálnak. Ennek folytán valahányszor egy α-részecske a kondenzátorba jut, az áram erőssége mindannyiszor kissé megnövekedik, a mit fémdróttal vezető összeköttetésben álló és nagy ellenálláson át a földdel is összekötött elektrometer lemezkéinek a nyugalmi helyzetből való kimozdulása jelez. A földdel azért kell az elektrometernek összekötve lennie, hogy a töltés, a melyet az elektrometer lemezkéi a részecskéknek a kondenzátorba jutásakor kapnak, rövid idő alatt ismét eltűnjék. A radioaktiv preparátumot a kondenzátor nyilása elé helyezve, az elektrometer lemezkéi ilyenformán lökésszerű mozgásokat végeznek s a szerzők szerint minden egyes lökésnek egy, a kondenzátor fegyverzetei közé jutó α-részecske felel meg A nyilás nagyságából, a preparátumnak a nyilástól való távolságából és az elektrometer-lemezkék kimozdulásainak számából megállapítható a preparátum által bizonyos idő alatt kilövellt összes α-részecskék száma. Az így nyert adatok jól megegyeznek a szcintilláció alapján kapottakkal, valamint az α-részecskék által elszállított elektromosság mennyiségéből számítottakkal.

Újabban ez eljárást Geiger (Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 1913, 15. kötet, 534. lap) még tökéletesítette, a mennyiben a henger tengelyében kifeszített fémdrótot igen finoman hegyezett tűvel helyettesítette s a tű és a henger között akkora feszültséget állított elő, hogy kisülés még éppen ne következzék be. Ha ekkor a tű csúcsával szemben levő kis nyiláson át a hengerbe egy α-részecske jutott, ez a kondenzátorban a gázt most is ionizálta; ez az ionizáció a nagy feszültség folytán itt is megsokszorozódott s a kondenzátor két fegyverzete között kisűlés következett be. A kisülések száma adta meg a kondenzátorba jutó α-részecskék számát. Ez eljárás a megelőzőnél annyival érzékenyebb, hogy segítségével a β-részecskék is megszámlálhatók.

Az elmúlt tél folyamán dr. Klupathy Jenő egyetemi tanár úr szívességéből a budapesti tudományegyetem II. számú fizikai intézetében alkalmam volt a Geiger-féle kísérleteket megismételni. A kisérleti berende-



zés lényegében ugyanaz volt, mint Geiger-nél (lásd az ábrát). Az A fémhenger egyik végében ebonit-dugó van, a mely a B tűt tartja. A tű hegye a henger fedelén levő kis (2 mm átmérőjű) nyilással 1-gyel szemben van. A henger össze van kötve a nagy feszültséget szolgáltató D áramforrás egyik sarkával; az áramforrás másik sarka a földbe van levezetve. A B tű fémes összeköttetésben áll az E elektrometerrel s azonkívül a nagy ellenállású R xilol-oszlopon át a földdel is össze van kötve. Geiger szerint valahányszor az 1. nyilás elé helyezett *C* preparátumból egy α-részecske a henger és a tű közé kerül, *A* és *B* között kisülés történik, s az *E* elektrometer lemezkéi széjjelugranak; de a töltés az *R* ellenálláson át csakhamar a földbe távozik, úgy hogy az elektrometer lemezkéi ismét összeesnek.

E lökésszerű kisülések megfigyelése azonban nem mindig sikerült. Igen nehezen tudtam ugyanis a kísérlet céljainak megfelelő tűt készíteni. A használt tűk közönséges acélvarrótűk voltak, a melyeket Geiger utasítása szerint finom olajkövön addig köszörültem, a míg egy százszoros nagyítású mikroszkópban is hegyesnek látszottak. Néha így sikerült olyan tűket készítenem, a melyek a radioaktiv sugárzó forrás távollétében perceken át nem adtak kisülést, ellenben a preparátumot az 1. nyilás közelébe hozva, a lökésszerű kisülések azonnal megindultak. Ha ugyanaz a preparatum a nyilástól ugyanakkora távolságban volt, akkor különböző ilyen jól sikerült tűkkel végezve a számlálást, az egy perc alatt észlelt kisülések száma nagyjában mindig ugyanaz volt; pontos megegyezés természetesen nem is várható. Sőt az adatok attól is függetlenek voltak, hogy a henger volt-e negativ feszültségre töltve, vagy a csúcs.

Az *A* henger *2* nyilása arra szolgált, hogy a *B* tű hegyét kvarczlemezen át ívlámpa fényével megvilágítsam. A megvilágítás hatására szintén lökésszerű kisülések következnek be, miként azt először Pringsheim (Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 1913, 15. kötet, 705. lap) észlelte. Pringsheim e lökésszerű kisüléseket a tűből a fény hatására kiváló fotoelektromos elektrónoknak tulajdonítja.

A legtöbb acéltűvel azonban, bár ezek a mikroszkópban éppen olyan hegyeseknek látszottak, mint a jól működő tűk, a kísérlet egyáltalán nem sikerült, mert a kisülések a preparátum, vagy a fény jelenlétében is csak oly feszültségnél voltak észlelhetők, a melynél a preparátum jelenléte nélkül is bekövetkeztek. Sok tűvel pedig a fény hatása szépen meg volt figyelhető, ellenben a radioaktiv sugárzással a kísérlet nem ment. A jó tűk is hosszabb-rövidebb idő alatt elromlottak, mert csúcsuk elporlott; az ilyen tűket néha hosszabb ideig tartó elektromos kisülések segítségével meg lehetett javítani.

Acéltű helyett jobbnak bizonyult a platinatű, melyet nem is kellett olyan gondosan meghegyezni, mint az acéltűt és a mely hosszú időn át jó maradt.

Nagyfeszültségű áramforrás hiányában a tű töltésére D-nél az elektrostatikai transformálót[1] használtam.

Minthogy ez az elektromosságnak nem oly kiapadhatatlan forrása, mint a Voltatelep, jó szigetelésről kellett gondoskodnom. Ezért az egész számláló készüléket üveghengerbe zártam és $CaCl_2$-vel szárítottam. Száraz időben evvel a berendezéssel a kisérlet biztosan megy. A biztonság azonban megszűnik, ha a levegő esős időben túlságosan nedves, a mikor a fémrészek kivezetésére használt szigetelőanyag felülete vezetővé válik.

A Geiger-féle eljárást szép eredménynyel felhasználták A. F. Kovařcik és L. W. Keehan (Phys. Zs. 15. köt. 4341 l. 1914) a β-sugarak elnyeletésének és szétszóródásának és J. Chadwick (Verh. d. D. Phys. Ges. 16. köt. 383. l. 1914) a β-sugarak mágneses spektrumának vizsgálatára.

Legújabban két orosz fizikus, Myssowsky és Nesturch (Annalen der Physik, 1914, 43. kötet, 461. lap) kétségbevonták, hogy e kísérletek tényleg az α részecskék számát adják. Ők megismételték az eredeti Geiger és Rutherford-féle kísérleteket a henger tengelyében kifeszített dróttal s különösen a »*természetes kisülések*«-re, vagyis azokra a lökésszerű kisülésekre fordították figyelmüket, a melyek az ionizáló források jelenléte nélkül is bekövetkeznek s a számlálást zavarják. (Ilyen kisüléseket Geiger újabb eljárásánál sem tudott teljesen elkerülni; az én kísérleteimnél jó tűk esetén e kisülések teljesen elmaradtak.) Szerintük e kisülések a henger és a középső fémdrót felületén levő és teljesen soha el nem hárítható egyenetlenségek, kiszögellések csúcshatása folytán jönnek létre. Valóban, ha a henger falát gondosabban simították, vagy a henger tengelyébe kifeszített drótot jobban megfeszítették, e kisülések száma csökkent. Az ionizáló források hatása e felfogás szerint csak az volna, hogy e kisülések bekövetkeztét megkönnyítik. Minthogy a szerzők kísérleteiknél a természetes kisüléseket a radioaktiv részecskék okozta kisüléséktől nem tudták élesen megkülönböztetni, sőt megfelelő körülmények közt a természetes kisülések számát is akkorára tudták növelni, amekkora a radioaktiv preparátum okozta kisülések száma, azért szerintük az eddigi kísérleteknél nyert számadatokat nem szabad a kondenzátorba jutó α-részecskék számával megegyezőknek tekintenünk. Ennek bizonyítékául tekintik, hogy Geiger újabb kísérletei is csak bizo-

[1] Schuller Alajos: Elektrostatikai Transformáló. Ugyane füzet 8. lap.

nyos határozott, a véletlentől függő tűk esetén sikerülnek, sőt PRINGSHEIM azon megfigyelését is, hogy e lökésszerű kisülések a folytonos fény hatására is bekövetkeznek.

Ez természetesen még nem jelenti, hogy az eljárás az α-részecskék számlálására egyáltalán nem használható, hanem csak annyit mond, hogy az eljárást még tökéletesíteni kell. MYSSOWSKY és NESTURCH valóban kilátásba is helyezik a módszer használhatóvá tételének megkísérlését.

GEIGER ezen támadásra legalább részben megfelelt az Ann. d. Phys. (4) 44. köt. 813. lapján 1914. Hogy a kisülések száma nem a számláló készülékre, hanem a sugárzásra jellemző, azzal mutatta meg, hogy ugyanazt a sugárzást két készüléken vezette át, a mikor a kisülések száma és időpontja mindkettőben ugyanaz volt.

Schuller Lajos.

A relativitás elvének kérdéséhez. (I. GRDIN, Izvjestija Jekaterinoslavskago gornago instituta 1914. Jekaterinoslav.)

A modern fizika nagy alapproblémájának kérdéséhez szól hozzá GRDIN ebben az értekezésében. Minthogy a kifejlődött fő felfogási irányokat kritikai megjegyzésekkel kíséri és saját gondolatainak kifejtésében ZEMPLÉN GYŐZŐ felfogására támaszkodik, szükségesnek tartjuk értekezését bő kivonatban ismertetni.

A relativitás elvének nagyszerű épülete mindent összevéve csak a MICHELSON-féle kísérletnek negativ eredményén alapszik. CHWOLSON erre nézve pompás hasonlatot hoz fel: «a relativitás elve nagy, felfordított csonka gúla benyomását teszi, a melyet oly kicsiny alapra helyeznek, hogy alig-alig maradhat meg egyensúlyban. Az elv alapjául egyetlen egy tény szolgál: az hogy a kísérletek, a melyekkel a Földnek a mozdulatlan éterben való mozgását akarták kimutatni, negativ eredményt adtak». CHWOLSON nézete szerint magyarázatra szorul, hogyan lehetett a relativitás elvét ilyen labilis alapon felépíteni, különösen ha figyelembe vesszük, hogy általa teljesen megváltoznak a fizikának és a klasszikus mechanikának alapelvei és fogalmai, sőt még a térnek és az időnek alapvető, eredeti, megszokott fogalmai is más értelmezést nyernek és végeredményben máskülönben is nagyon paradox következtetésekre jutunk. A magyarázatot CHWOLSON azon körülményben találja, hogy az emberben benne van valami különös «félelem az abszoluttól» (horror absoluti), CHWOLSON úgy véli, hogy az abszoluttól való félelem akadályoz meg abban hogy az abszolut mozgást elképzelhessük. GRDIN szerint ennek oka egészen más. A tér és az idő nem alkotnak a külső világban objektive létező valóságot, hanem azok csak a külső világ tárgyaira és jelenségeire vonatkozó megfigyeléseinknek szubjektiv formái, a melyek a mi pszichikai organizmusunktól függnek, úgy hogy más organizmus mellett az észrevétel formái is mások lehetnének. De ha a tér és az idő az észrevételnek csak konvencionális formái, akkor értjük, hogy lehetetlennek látszik a külső világban abszolut nyugalomban levő testeket, abszolute mozdulatlan koordinátákat és reájuk vonatkoztatott abszolut mozgásokat keresni, mert magukban az észrevételnek ezen formáiban — minthogy ezek csak jelképek, szimbolumok — sincsenek meg az abszolutnak szükséges elemei.

Azonban az abszolut mozgás elképzelésének lehetetlensége épen úgy megtalálja magyarázatát a klasszikus mechanikában, a NEWTON-nak és GALILEI-nek köszönhető régi relativitási elvben is és semmiképen sem teszi szükségessé a relativitás modern (EINSTEIN vagy LORENZ-féle) elvének elfogadását.

Valóban még ha sikerülne is megismerni a Földnek a világéterhez viszonyított mozgását, még akkor sem lehetne abszolut mozgásokat megállapítani, mert semmi kriteriumunk sincs annak megitélésére, hogy maga az éter egész tömegében — makroszkopikusan — mozdulatlan-e? Lehetséges, hogy az éternek egész tömege valami haladó, vagy lassú forgó mozgást végez, lehetséges, hogy az éternek egyes nagykiterjedésű részei egymáshoz képest különböző irányban mozognak.

A mondottakból kitűnik, hogy az abszoluttól való félelem semmiképen sem lehet forrása a relativitás elvének, úgy, hogy ezen elv alapvető forrásául mégis csak MICHELSON kísérletének negativ eredménye marad. Azonban ezt az eredményt más hipotézisek és teoriák is megmagyarázhatják, a melyeknek elfogadása nem követeli szükségképen az eddig megállapított legegyszerűbb és legérthetőbb tudományos alapfogalmakkal való szakítást. E hipotézisek felállításánál különösen három empirikus tényt kell tekintetbe venni: MICHELSON kísérletét, a fény aberrációját és KEPLER-nek törvényeit (a kettős csillagoknál).

Hogyha a hipotézisek megfelelnek ezen három ténynek, akkor más kísérleti tényekkel való megegyezésük kimutatható.

Az elektromágneses fényelméletre vonatkozó munkáiban HERTZ ragaszkodott a mozgó test által magával ragadott éter elméletéhez. Ezen hipotézis elfogadásával egészen világosnak látszik MICHELSON kísérletének negativ eredménye, mert a mozgó Földnek magával kell vinnie az étert és így minden fénytüneménynek ép úgy kell létrejönnie, mintha a Föld teljesen mozdulatlan lenne. Azonban HERTZ hipotézise éles ellentétben van az aberráczióval, továbbá azon közismert kísérletek eredményeivel, a melyeket FIZEAU a fénytvivő közeg mozgásának a fény terjedési sebességére gyakorolt befolyásra vonatkozólag végzett. HERTZ hipotézisét tehát, daczára annak, hogy teljesen megmagyarázza MICHELSON kísérletét, el kellett vetni.

A relativitás elve két thesisből áll. Az első teljesen egyenértékű a klasszikus mechanika közönséges relativitás-elvével. A második thesis kijelenti, hogy minden koordináta-rendszerben, a melynek nincs forgó mozgása, de a mely tetszésszerinti haladó mozgással bírhat, a fénysugár meghatározott és mindig állandó értékű c sebességgel halad függetlenül attól, hogy ezen fénysugarat a vizsgált rendszerhez viszonyítva nyugvó vagy mozgó test bocsátja-e ki? A fénysebesség állandóságának posztulátuma megmagyarázza MICHELSON kísérletének negativ eredményét. És ebből származnak a relativitás elvének összes feltünő következményei és paradoxonjai is.

E mellett a relativitás elvének két különböző iránya van; az egyik irány (LORENZ) elfogadja az éter létezését, a másik ezt (EINSTEIN) határozottan elveti. WIECHERT az első irányút feltételesnek, a másik irányút feltétlennek nevezi. Az első irány a fénynek elektromágneses hullámok alakjában való terjedését, a másik irány a fény emissziós teoriáját fogadja el.

MICHELSON kísérletének negativ eredménye a relativitás elvén kívül FITZGERALDnak és LORENZnek hipotéziséből is folyik, a mely szerint a testek az éterhez viszonyított mozgásuk irányában

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

arányban megrövidülnek, hol v a testnek az éterre vonatkoztatott sebessége. Ez esetben a világéter teljesen mozdulatlan maradhat, a melyet tehát a mozgó testek egyáltalában nem ragadnak magukkal. Ilyen feltételek mellett magyarázatát lehet adni minden jellemző empirikus ténynek, a mely az így előállított teoretikus konstrukció helyességének kriteriuma gyanánt szolgálhat.

De FITZGERALD és LORENZ hipotézisének egy lényeges hiánya van. Nagyon különösnek látszik, hogy a testek miért szenvednek épen akkora megrövidülést, a mekkora szükséges, hogy az észlelő előtt épen a Földnek az éteren át való mozgása rejtve maradjon.

Az EINSTEIN-féle feltétlen relativitási elvnek második része oly hipotézist tartalmaz, a mely nemcsak hogy nem folyik az első részből, a mint azt ezen elvnek némely szélső híve (pl. PLANCK) állítja, hanem épen ellenkezőleg logikailag ellentmond neki. Egyrészről elveti az étert, elfogadva a fénynek az üres térben való emissziószerű terjedését, másrészről azt állítja, hogy a haladó világítórészecskéknek sebessége nem függ az azokat kibocsátó fényforrás sebességétől, azaz sebességük állandóan ugyanaz marad függetlenül attól, vajjon a fényforrás nyugalomban van vagy pedig mozog-e? A fény sebességének a fényforrás mozgásától való függetlensége csak úgy érthető meg teljesen, ha elfogadjuk a fénynek az éterben való rezgésszerű tovaterjedését, mert akkor elképzelhető, hogy az elektromagnetikus hullámok sebessége csakis a közvetítő közegnek tulajdonságaitól függ és nem a fényforrás helyzetétől vagy mozgásától. A jelzett körülmény mindig kiküszöbölhetetlen logikai ellentmondást tartalmaz az EINSTEIN-féle relativitási elv alapvető tételeiben. Nem csoda tehát, hogy ez az elv különös eredményekre vezet és rendkívül komplikálja a mechanikának és a fizikának legegyszerűbb fogalmait és eredményeit.

Az előbb említett ellenmondással szemben mintegy tiltakozásképpen rá lehet mutatni a RITZ-féle emissziós elméletre, a mely a relativitás közönséges mechanikai elvén alapszik és megőrzi a NEWTON-féle elmélet alapvető vonásait.

Tegyük fel, hogy a nyugalomban levő fényforrásból kibocsátott fény sebessége c_0, tegyük fel továbbá, hogy a fényforrás a vizsgált, forgó mozgásban nem lévő rendszerhez viszonyítva v sebességgel mozog, akkor a mozgó fényforrástól kibocsátott fény sebessége c, RITZ szerint — viszonyítva a mi rendszerünkhöz — előállítható irány és nagyság szerint azon parallellogramma átlójával, a melynek oldalai v és a relativ mozgásban levő, kiválasztott sugárnak c_0 sebessége; vagyis

$$c = \sqrt{c_0^2+v^2+2c_0v\cos\varphi},$$

a hol φ a fénysugár és a v által bezárt szög.

Azon sugárnál tehát, a melynek haladási iránya megegyezik a fényforrás v sebességének irányával, vagy épen ellenkező vele, a vizsgált rendszerhez viszonyított sebességre c_l-re vonatkozólag nyerjük:

$$c_l = c_0 \pm v$$

és azon sugárnál, a mely a fényforrás mozgásának irányára merőlegesen terjed tovább, a mi rendszerünkhöz viszonyított terjedési sebességére c_s-re nyerjük:

$$c_s = \sqrt{c_0^2 + v^2}.$$

Innen következik, hogy ha a fényforrás a Földnek a Nap körüli keringésénél a Földdel együtt változtatja helyét, akkor a fénysugarak terjedési sebessége (a Földhöz viszonyítva) minden irányban mindig ugyanaz, t. i. c_0 marad. E szerint a RITZ-féle elmélet szempontjából könnyen érthetőnek látszik a MICHELSON-féle kísérlet negativ eredménye. Épen ily tökéletesen egyezik ezen elmélettel a fény aberrácziójának jelensége is.

Azonban RITZ elmélete éles ellentétben van KEPLER törvényeivel a kettős csillagok esetében, a mint azt DE SITTER kimutatta. Tegyük fel, hogy a kettős csillagok egyike valamely időpillanatban a Földön levő megfigyelőtől egyenes irányban távolodik, akkor ezen csillagból a Föld irányában haladó fény sebessége $c_0 - v$, a hol v a vizsgált csillag sebessége. Tegyük fel továbbá, hogy bizonyos időköz elteltével a felvett csillag pályájának felét írta le és az illető pillanatban a földi észlelő felé mozog a megadott v sebességgel, akkor a csillagtól elinduló fénynek a Földhöz viszonyított sebessége $c_0 + v$ lesz. Ha a felvett kettős csillagnak a Földtől való távolsága L, akkor a második sugárnak ezen távolság befutására kevesebb időre van szüksége, mint az első sugárnak, a különbség:

$$\frac{L}{c_0 - v} - \frac{L}{c_0 + v} = \frac{2Lv}{c_0 - v^2},$$

a mi nagyon közel

$$\frac{L}{c_0} \cdot \frac{2v}{c_0}.$$

A $\frac{L}{c_0}$ hányados azt az időt adja meg, a mely szükséges, hogy a fény a vizsgált kettős csillagtól a földre jusson, legyen ez az idő például 30 év, vagyis 30 . 365 nap. Legyen a csillag sebessége 100 $\frac{km}{sec}$ és a fényé 300,000 $\frac{km}{sec}$. Akkor a sugarak által útjuk befutására szükséges idők különbsége lesz:

$$\frac{30 \,.\, 365 \,.\, 2 \,.\, 100}{300{,}000} = 7 \cdot 3 \text{ nap.}$$

A szpektroszkopikus kettős csillagoknak keringési ideje egynéhány nap. Ha a vizsgált kettős csillagnál a fél periodus 7·3 nap (tehát az egész periodus 14·6 nap), akkor ezen csillagok egyikének két — a pályán diametralisan szemben fekvő — helyzetéből a fénysugarak egyszerre jutnának a megfigyelő szemébe. Így aztán a szpektroszkóp segélyével lehetséges lenne megfigyelni, hogy a csillagnak v sebessége pillanatszerűen ellenkezőjére változnék. Ha más számbeli viszonyokat veszünk fel és nem is jutunk épen ennyire valószínűtlen eredményekre, mindenesetre a KEPLER-féle törvényektől való nevezetes eltérést fedezünk fel. Ennek következtében vagy elvetjük RITZ-teoriáját, vagy pedig beismerjük, hogy a vonzás a kettős csillagok esetében nem a NEWTON-féle törvény értelmében történik. Minthogy pedig ez utóbbi feltevésre épenséggel semmi okunk sincs, a RITZ-féle emissziós elméletről kell lemondanunk.

MICHELSON kísérletében a fénysugárnak azon abszolut útja, a melyet a Föld napkörüli mozgásának irányában és visszafelé megtesz k-szor nagyobb, mint az erre az irányra merőleges sugár abszolut útja. Hogy megmagyarázzák, miért teszi meg mindkét sugár útját ugyanazon idő alatt, FITZGERALD és LORENZ feltették, hogy minden test mozgásának irányában k arányban megrövidül. Ugyanezt ZEMPLÉN dolgozatában azon feltevéssel magyarázza,[1] hogy a fény sebessége a terjedés irányában (c_l), úgy a fényforrás mozgásával megegyező, mint azzal ellenkező irányban k-szor nagyobb, mint a reá merőleges (c_s) sebesség.

$$c_l = kc_s = \frac{c_s}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}},$$

a hol v a fényforrás sebessége az éterhez viszonyítva és c_0 olyan fénysugár sebessége, melynek forrása az éterhez képest nyugalomban van. ZEMPLÉN felveszi, hogy $c_s = c_0$.

[1] Lásd «Physikalische Zeitschrift» I. 15. No. 10. 1914. 534. o. «Ueber die Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Lichtquelle» von GY. ZEMPLÉN.

Akkor

$$c_l = kc_0 = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}.$$

A haladás iránya menti és az arra merőleges fénysebességeket c_l-et és c_s-et természetesen az éterhez viszonyítva számítjuk. Nagyon megközelítőleg áll

$$c_l = c_0 \left(1 + \frac{v^2}{2c_0^2}\right).$$

Egy tetszésszerinti sugár esetében, a mely a v sebesség irányával φ szöget alkot, a fény sebessége (az éterhez viszonyítva) nagyon közel

$$c = c_0 \left[1 + \frac{(v \cos \varphi)^2}{2c_0^2}\right].$$

vagy

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v \cos \varphi}{c_0}\right)^2}}.$$

Ilyen fénysebesség mellett nem lehet kimutatni a Földnek az éterhez viszonyított mozgását akármilyen irányra nézve hasonlítsuk is össze a sugarak által megtett utak befutásához szükséges időt, feltéve, hogy a $\frac{v}{c_0}$ hányadoshoz viszonyítva a negyedrendű kicsiny mennyiségeket elhanyagolhatjuk.

A mondottakból látható, hogy Zemplén hipotézise nagyon egyszerűen magyarázza meg Michelson kísérletének negativ eredményét, nincs szükség holmi kontrakcziók felvételére. Az aberráczió tüneményét itt a szokott módon magyarázzuk. Kimutatjuk, hogy a fénysebességeknek a különböző irányokban felvett különbözősége nem ellenkezik a kettős csillagok mozgásának törvényeivel. Az előbbi paragrafus eljárását alkalmazzuk arra az időközre, a mely alatt a kettős csillagok egyike pályájának negyedrészét írja le. Akkor az egyik sugárnak késése a másikhoz képest

$$\frac{L}{c_s} - \frac{L}{c_l} = \frac{L}{c_0} - \frac{L}{c_0}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}},$$

vagy nagyon közel

$$\frac{L}{c_0} \cdot \frac{v^2}{2c_0^2}.$$

Az előbbi paragrafus speciális példájának számadatait véve a keresett késésre, nyerjük:

$$\frac{30 \,.\, 365 \,.\, 100^2}{2 \,.\, 300{,}000^2} = 0{\cdot}00061 \text{ nap}.$$

Ez oly csekély időköz, a mely a vizsgált kettős csillag esetében a KEPLER-féle törvényektől való észrevehető eltérésre semmiesetre sem enged következtetni.

ZEMPLÉN hipotézise GRDIN szerint a következő tökéletlenségeket mutatja: 1. Különösnek látszik, hogy a fénynek a haladás irányában birt sebessége miért épen annyiszor nagyobb a reá merőleges irányúnál, a mennyiszer nagyobbnak kell lennie, hogy a megfigyelő előtt észrevehetetlenné tegye a Föld mozgását az éterben? 2. Miért egyforma a fénysebesség a fényforrás mozgásával ellenkező és az azzal megegyező irányban, holott természetesebbnek találnók, hogy az első sebesség kisebb legyen, mint a másik. 3. Teljes joggal feltehető — ha felveszszük a fénynek az éterben való hullámszerű terjedését — hogy a fényforrás mozgása befolyásolja a fény sebességét a különböző irányokban közel a fényforráshoz, de nehéz megérteni, hogy nagy távolságban a fényforrástól hogyan maradhatnak meg ezek a különböző fénysebességek; távol a fényforrástól a fény sebességét csak a közvetítő közeg, az éter tulajdonságai határozhatják meg és azért ezen helyeken a fénysebességnek minden irányban egyenlőnek, vagy igen közel egyenlőnek kell lennie a c_0 sebességgel, a mely az éterhez viszonyítva mozdulatlan forrásból kiinduló fény sebessége.

GRDIN tehát a következő hipotéziseket állítja fel:

1. A mozgó testek egyáltalában nem viszik magukkal az étert.

2, A mozgó fényforrásból kiinduló hullámot — keletkezésének első pillanatában — a fényforrás teljesen magával ragadja. E közben a fényforrás gömbalakú hullámfelületnek középpontja lesz, a mely a fényforráshoz viszonyítva minden irányban ugyanazzal a sebességgel nagyobbodik, a mekkora sebességgel az éterben mozdulatlan fényforrásból kiindul a fény.

3. A hullámnak ilyen magával ragadása gyengébb lesz, a mint a hullám méretei nőnek (történik ez teljesen vagy asszimptotikusan) és terjedésének (az éterhez viszonyított) sebessége minden irányban csakhamar közeledik (teljesen vagy asszimptotikusan) az éterben mozdulatlan fényforrásból kiinduló fény sebességéhez.

4. A hullámnak a fényforrás által való kezdetbeli teljes vagy majdnem teljes elvitele csak a fényforrás oly sebességei mellett jöhet létre, a melyek a fénysebességhez viszonyítva nem nagyok. Ha a fényforrás sebessége nagy, ezen növekedésnek arányában a hullámot mindinkább kevésbbé befolyásolja a fényforrás mozgása.

Ezen feltételekből azt a következtetést vonja le, hogy a kibocsátás első pillanatában a fénysugár a mozgó fényforráshoz viszonyítva úgy mozog, mintha ezen fényforrás az éterhez képest mozdulatlan volna. Következik ebből, hogy a kibocsátás első pillanatában a fénysugarak irányát és sebességét az éterhez képest a parallelogrammtétel szerint kaphatjuk, egészen úgy, mint a Ritz-féle teoriában. Tehát ezen pillanatban:

$$c_1 = \sqrt{c_0^2 + v^2 + 2c_0 v \cos\varphi}$$

$$c_{l_1} = c_0 \pm v\,; \quad c_{s_1} = \sqrt{c_0^2 + v^2}.$$

Ha a fényhullám tovább halad, akkor — minthogy a fényforrás magával viszi — exczentrikus gömbfelületeket, vagy azokhoz igen hasonló felületeket alkot, azért aztán a fénysugarak, ha az éterhez viszonyítva vizsgáljuk azokat, kis mértékben meggörbülnek. Rövid idő mulva a hullám méretei mind nagyobbak és nagyobbak lesznek annak, a fényforrás által való elvitele teljesen vagy részben megszűnik és akkor a felvett fénysugarak az éterhez viszonyítva vagy egyenes vonalú irányt nyernek (a hullámot a fényforrás nem ragadja már magával, a hullámfelületek tehát konczentrikus gömbfelületek lesznek) vagy pedig olyan irányokat, a melyek az egyeneshez asszimptotikusan közelednek és ekkor a fénysugaraknak az éterhez viszonyított sebességére nézve nagy megközelítéssel érvényes hogy

$$c_2 = c_0\,; \quad c_{l_2} = c_0\,; \quad c_{s_2} = c_0.$$

Grdin hipotézisei megmagyarázzák Michelson kísérletének negativ eredményét. Azon idő, a mely alatt a fényhullámoknak a fényforrás által való elvitele még érezhető, függhet ezen forrás erősségétől és sebességétől. Tegyük fel, hogy 0·001 sec alatt a magávalragadásnak észrevehető gyöngülése még nem áll be; akkor a forrástól számított 300 km távolságig a fény terjedése a rendszerben — a mely ezen forrással együtt mozog — úgy történik, mintha a rendszer a vizsgált fényforrással együtt az éterhez viszonyítva nyugalomban lenne. Ha ez a hatás 0·000001 sec alatt nem jelentkezik észrevehető mérvben, akkor 300 méternyi távolságban a forrástól a fény terjedése még mindig úgy történik a tárgyalt rendszerben, mintha a rendszer az éterhez viszonyítva nyugalomban lenne. Minthogy Michelson kísérleti készülékének (az interferometernek) méretei egy két méternél nem nagyobbak, világos, hogy ezen kisérleti berendezés a fent felvett adatok mellett nem mutathatta ki saját mozgását a Nap körül.

Grdin szerint csak Zemplén és az ő hipotézise teszi lehetővé azt, hogy elkerüljük a tér, idő, tömeg stb. fogalmainak rendkívüli komplikáczióját, a melyet a relativitás elve bevezet, ezekkel egyszersmind elkerülhető a mozgó testek megrövidülésének hipotézise is. Az a véleménye, hogy a relativitás elve nem fog a tudományban megmaradni, mert 1. premisszái a logika szempontjából nem kifogástalanok, 2. ez az elv a legnagyobb mértékben komplikálja a mi legegyszerűbb fogalmainkat, 3. mert más módszerek is vannak az egyedül döntő jellegű Michelson-féle kísérletnek magyarázatára, a melyek nem vezetnek ilyen komplikácziókra.

A relativitás elvének hívei elragadtatással mutatnak reá, hogy ez az elv a tudományban oly forradalmat idéz elő, a melyhez képest jelentéktelen az a forradalom, a melyet Kopernikusnak a Nap mozdulatlanságáról szóló tana idézett elő a mi világnézetünkben. Azonban igen nagy köztük a különbség: Kopernikusnak eszméje nagyon egyszerűvé tette a mi világnézetünket, a relativitás elve pedig nagyon komplikálja.

Grdin szerint a relativitás elvének gyors elterjedésében két ok működött közre. Elsősorban az elv kimondásától (az 1905. év végétől) eltelt rövid idő alatt még nem jegeczesedhettek ki a vele szemben emelhető kifogások. Kezdetben a relativitás elvével csak a Fitzgerald és Lorenz-féle feltevést lehetett szembeállítani, de ez nem hatott meggyőzően önkényessége miatt és azért, mert maga is merített a relativitás elvének tételeiből. Második és főoka a relativitás elve elterjedésének és sikerének abban keresendő, hogy a pillanat körülményeinek hatása alatt, a tudománynak oly útra kellett lépnie, a melynek hamissága csak akkor tűnik ki, a mikor már az egészet végigjárja. Lehetséges, hogy a tudomány majd csak akkor veti el, a mikor már nemcsak 350, hanem 3500 értekezést írtak róla és valóban nagyra nőhet ezen művek száma, mert a relativitás elve nagy választékot nyújt a különböző témákból: annak szempontjából a fizikának, mechanikának és a csillagászatnak sok már megoldott problémáját újból meg lehet oldani. Újra ismétlődik itt a tudomány történetében jól ismeretes jelenség, hogy csak tévedések árán ismerhetjük meg az igazságot, hogy csak az összes variánsok ismerete teszi lehetővé, hogy a valóságnak legjobban megfelelőt kiválaszszuk.

Sulek József.

HALOTTAINK.

Terlanday Emil.

1866 aug. 27—1915 ápr. 14.

«A kezdet munkájánál soha sincs hiány emberekben, de keveset látunk, a kik végigélték volna, a mit kezdtek.» Neng Tsze kínai filozófusnak a minap olvasott e mondása jutott eszembe, midőn az említett kevesek közt látom rendtársamat és tagtársunkat: TERLANDAY EMIL-t. A rend alapítójának: Szent Benedeknek szellemében és példája szerint szinte «állva» halt meg, mert jóllehet éveken át betegeskedett, mégis végsőkig dolgozott. Halálát nem is régi baja, a mely ellen nagy vigyázattal tudott küzdeni, hanem hirtelen támadt bélcsavarodás, majd a sikeres műtét után beálló szívgyöngeség okozta, 1914 ápr. 14-én. A «Mathematikai és Physikai Társulat»-ban előadását és kéziratát vártuk és gyászjelentését hozta meg a posta. RADOS GUSZTÁV dr. alelnökünk ápr. 22-iki előadógyűlésünkön kifejezést is adott a Társulat őszinte részvétének s kiemelte TERLANDAY tagtársunk fáradhatatlan buzgóságát és Társulatunk iránt tanusított nagy lelkesedését, hiszen Társulatunk alapító tagja volt ő és gyűléseinkről úgyszólván sohasem hiányzott, jóllehet vidékről kellett a fővárosba jönnie. E lelkesedését annál is inkább meg kell becsülnünk, mert tulajdonképeni szaktárgya nem a természettan, hanem a természetrajz volt. De e tárgyak mégis rokontárgyak, sok érintkező ponton találkoznak.

TERLANDAY tanulmányai legfőképen ily érintkező pontokra vonatkoztak: a kristályok tulajdonságaira. Kéziratai közt 671 ívet találtam teleírva mind e kérdésre vonatkozó jegyzetekkel. S ő — úgylátszik — megtartotta a horatiusi «nonum prematur in annum» elvet, mert míg első tanulmánytárgyáról, a jégbarlangokról utolsó értekezése 1896-ban jelent meg, a kristályokra vonatkozó vizsgálatairól csak

1908-ban adja ki első közleményét. Így mintegy önként két részre különül működése: egyik a jégbarlangokra, másik a kristályokra vonatkozik.

Még fiatal, alig két éves tanár volt,[1] midőn a Természettudományi Közlönyben megjelent értekezése: «*A jégbarlangokról*» (1891. évf. 268. f. 617—625 l.). De ő nem elégszik meg csupán elméleti okoskodásokkal, hanem megfigyelésekre, kisérletekre akarja alapítani vizsgálatait. Ép ezért hét ízben keresi fel a gömörmegyei Sziliczét, hogy az ottani jégbarlangban mindegyik alkalommal több napig végezhesse különféle műszereivel vizsgálatait. E vizsgálatok eredményeképen jelent meg négy értekezése; kettő magyar nyelven (*A sziliczei jégbarlangról.* Természettud. Közlöny 1893. évf. 288. f. 404—411. l. és 1896. évf. 320. f, 183—192. l.) és kettő német nyelven. (*Meine Erfahrungen in der Eishöhle von Szilicze.* Dr. A. Petermanns Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographischer Anstalt. Gotha. 1893. H. 12. 283—287. l. és *Die Sommereisbildung in der Eishöhle von Szilicze.* U. o. 1896. H. 9. 217. l.) Meg kell jegyeznünk, hogy a német értekezések nem egyszerű fordításai a magyaroknak, hanem mindegyikben találunk új gondolatokat is. Szerinte a jégképződés főoka az, hogy a barlang hasadékaiban télen megfagyott víz tavaszkor olvadásnak indul, a barlangba csepegés közben párolog és a párolgás okozta hőelvonás következtében újra megfagy. Nagy türelemmel végzett megfigyelései oly alaposak voltak, hogy az ellenvetésekre (dr. Tellyesniczky Kálmán: Természettud. Közlöny Pótfüzetei 1894. évf. 86. l.) könnyen megfelelhetett.

A kristályok, illetőleg a testek szerkezetére vonatkozó nézeteinek kifejtését még hosszabb vizsgálatok, kísérletek előzték meg. Maga mondja, hogy közel tíz évig foglalkozott e tárgygyal, midőn erre vonatkozó első értekezése megjelent s értekezéseiben ismételten említi, hogy még ké-

---

[1] Terlanday János Chinoránban (Nyitra vm.) született 1866 aug. 27-én. Gimnáziumi tanulmányait Komáromban, (I., II. o.), Pozsonyban (III., IV. o.) és Nagyszombatban (V., VI. o.) végezte és 1882 júl. 30-án a Szent-Benedek-Rendbe lépett s ez alkalommal Emil nevet kapott. További tanulmányait Pannonhalmán végezte, érettségit Győrött tett, míg a tanári oklevelet Budapesten szerezte meg. 1889-ben júl. 6-án áldozópappá szentelve, mint gimnáziumi tanár a kies fekvésű Kőszegre került, majd Pannonhalmán (két ízben: 1895—96 és 1898—1900) és Sopronban (1896—98) tanít, míg két évig (1900—1902) a budapesti rendi növendékek prefektusa, 1902 óta pedig haláláig az esztergomi főgimnáziumnak volt tanára.

sőbb is egy-egy megfigyelést hónapokig végzett. E vizsgálatainak eredményét két előadásban mutatta be Társulatunk előadógyűlésein s ezen előadásai később kibővítve a Math. és Phys. Lapokban is megjelentek «*A kettőstörés utánzása üveglemezekkel*» czímen (I. r. 1908. évf. 255—263. l. és II. r. 1911. évf. 302—330. l.), majd kissé átdolgozva és ismét továbbfejlesztve az «Annalen der Physik.»-ben (Leipzig, 1912, Bd 39. 1207—1229. l.) «*Das Nachahmen der Doppelbrechung durch Glaslamellen*» czímen. Még két értekezése jelent meg német nyelven e tárgyban, ezeknek tartalmát azonban magyarul sehol sem közölte. Az egyik: «*Zur Frage der inneren Struktur der Kristalle*» a Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie» 1914. évfolyamában, Bd. I. 93—112. l.-on, míg a másik teljesen önálló füzet alakjában jelent meg, mely alig egy-két nappal halála előtt lett készen: «*Ein Gesetz der Konstruktion der Körper und sein Zusammenhang mit dem Relativitätsprinzip.*» Stuttgart, 1915. E. Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung 28 l. Ezt az értekezését Kroller Miksa zalavári benczés-apátnak ajánlotta.

Sokan gondolták és mondották, hogy Terlanday olyan dolgokkal is foglalkozott, melyek nem tartoztak szaktárgyai körébe. Jóllehet ezt csak dicséretére mondhatták, mégis értekezései arról győznek meg, hogy a mathematikai és fizikai szakból mindaz, a mire figyelme kiterjedt, csak egy, még pedig szaktárgya körébe vágó dologra vonatkozott: a kristályok tanára. A kristályok szerkezetét kutatta és e kutatásai alapján nemcsak a kristályokra, hanem az összes testekre vonatkozó törvényét így állította fel: «Die Körper sind Materiesysteme, welche aus gut charakterisierbaren Systemen niederen Ranges bestehen, zwischen welchen letzteren eine zu dem System gehörende Interwallenmaterie vorhanden ist; die letzteren Systeme bestehen weiterhin wieder aus Systemen noch niedrigeren Ranges mit einer zum Systeme gehörenden Interwallenmaterie; und so in infinitum» (Ein Gesetz etc. 11. l.). Elméletét kísérletekkel iparkodott igazolni (Zur Frage der inneren Struktur etc. 99—108. l.) s kimutatni, hogy a kristályok apró kis kristályokból (ú. n. Baukriställchen), ezek átalakult fizikai molekulákból, poliéderekből, ezek ismét kémiai molekulákból és így tovább vannak összetéve, de mindenütt szinte a legnagyobb súlyt az összetevő részecskék közt lévő úgynevezett intervallumbeli anyagra vetette. Ez alapon a kristályok szerkezetét utánozni is törekedett. Így a kalczit-romboéder hármas lamellaritásából az egyik irányú lamellaritást vékony üveglemezkék egymásmellé helyezésével akarta előállítani és a fény kettőstörését ezen az alapon megfejteni. Vizsgálatainak kiindulópontja tulajdonképen ez volt. Ezen gondolattal és erre vonatkozó kísérletekkel foglalkozott legtöbbet kézirataiban is. Készített is ily üveglemezkékből kettőstörő eszközöket, melyeket «*bifractor componentiális*»-nak nevezett el; mivel t. i. a kalczit hármas lamellaritásából csak az egyiket tudta utánozni s így a kettőstörés tüneménye sem teljes, hanem csak részleges, összetevő (componentiális). Készülékét a híres-szentpétervári egyetemi tanárnak: Chwolson-nak is megküldötte, a ki azt az Orosz Fizikai Társulatnak gyűlésén be is mutatta. (V. ö. Prof. O. Chwolson levelét 1908. XI. 3.)

Ha elméleti törvényét teljesen bebizonyítani nem is tudta s ha törvényének utolsó része: «und so in infinitum» már eleve filozófiai és fizikai nehézségekbe ütközik is, mégis jó irányítást nyújtott a testek szerkezetének eddig még mindig ismeretlen problémájához. De törvényének a relativitás elvére való alkalmazása: vagyis a másik véglet, hogy t. i. szerinte a nagymindenség is, mint a testek, egy nagy tömegrendszer, mely az abszolut nyugalomban lévő étherbe van beleágyazva — már méltán talál alapos ellenvéleményre. Erre nézve mi is azt mondhatjuk, mit Born a «Physikalische Zeitschrift» szerkesztője ír: «Die Uebertragung von Erfahrungen, die an kleinen Kristallen gemacht sind, auf kosmische Vorgänge, scheint uns willkürlich und müsste durch weit mehr Tatsachenmaterial belegt werden». (V. ö. Dr. M. Born levelét. 1914 V. 12.)

Terlanday azonban nemcsak kitartó, végtelen türelmű kutató volt, hanem tanár is, még pedig gyakorlati érzékű tanár. Ezt igazolják azon készülékei, melyekkel a középiskolai oktatást iparkodott eredményesebbé tenni. Ezen eszközei a következők: 1. Már 1898-ban készít *gazométerből egy gázátvezető edényt*, melyet kísérleteinél három szempontból is használhat: ugyanis a gázáram megszakítására, a gáz elraktározására és a gáz szívására. Ezt a «Magyar Chémiai Folyóirat» 1898. évfolyamában 11. f. 166—568. l.-on ismerteti: «*Az átvezető edénnyé alakított gazométerről*». 2. Majd *szemléltető keretet* készít a földrajztanításhoz, melyben a legkülönfélébb levelezőlapokat helyezheti el s így az egyes földrajzi helyeket az ifjúságnak könnyen és olcsón bemutathatja. Ismertetését: «*Szemléltető keret a földrajztanításnál*» az «Országos Középiskolai Tanáregyesületi Közlöny» 1908/9. évf. 3. f. 136—137. lapjain közli. 3. Két évvel később háromféle készüléket szerkeszt *a szenesedés bemutatására*. Ezen eszközeivel különösen azt akarta kimutatni, hogy a szenesedéshez semmi másra, mint csak hőre van szükség, legyen e hő bár alacsonyfokú, mint pl. a természetben is, továbbá azt czélozta és sikeresen el is érte, hogy a szenesedéskor keletkező folyékony és légnemű termékek azonnal szemlélhetők legyenek. Készülékeit Szíjártó Miklós és Medveczky Lajos tanárok szakértői ajánlatára a M. kir. Vallás- és Közoktatásügyi Minisztérium 20,288/1911. sz. a. a tanszerek hivatalos jegyzékébe felvette, ajánlotta és az Országos Tanszermúzeumban kiállította. (V. ö. Országos Pædag. könyvtár és Tanszermúzeum Hiv. Értesítője 1911. évf. 61—62. l. Készülékeit maga Terlanday ugyanitt ismerteti: «*A szenesedést bemutató készülék*» czímen 1910. évf. 64—68. és 1911. évf. 155—157. l.). 4. Még egy elmés készüléke van, mely a *közlekedő edények* törvényeinek ismertetése mellett a kutak, a szökőkutak keletkezésének bemutatására, sőt a hajszálcsövesség törvényeinek igazolására is szolgál. (Ismertetése ugyancsak az O. P. K. és T. H. É.-ben 1912-ben jelent meg «*A közlekedő edények kapcsolása szökőkúttal*» czímen. Különlenyomatban is 6 l.) 5. Végül pedig a Magyar Földrajzi Intézet kiadásában (Budapest) jelent meg 1914-ben egy *rajzfüzete a mennyiségtani földrajz elemeinek ábrázolására* külön a tanulók és külön — útmutatással ellátva — a tanárok számára. Úgy tudjuk, mindegyik iskolai szerét több intézet már bevezette.

Hogy munkásságát teljesen ismertessük, meg kell még említenünk, Dr. A. Petermanns Mitteilungen etc. folyóiratban (Gotha, 1896. évfolyam, 150. l.) egy *könyvismertetése* is megjelent, melyben Dr. Török Veremund munkáját: «A kőszegi hegység orométriája» ismerteti. Kéziratai között pedig egy magyar (*A gerinczes állatok szaglásszervéről*, 68 l.) és egy német (*Zur Frage der Eisbildung in den Eishöhlen*, 30 l.) értekezés és igen sok jegyzet maradt fenn, melyek mind dolgozataihoz előkészületül szolgáló tanulmányokat tartalmaznak, még pedig mind — különösen a nyomda alá előkészítettek — igen pontosan és kiválóan szép rajzokkal vannak kiállítva.

Élete csendes, visszavonult, szerzetesi élet volt. Dolgozott ideális czélokért s ha nagy sikereket nem is ért el, élete épen nem volt hiábavaló élet, mert hiszen a kötelességteljesítés és a munka önmagában birja jutalmát és mert tudjuk, hogy van abszolut igazság és jóság, a ki számontartja és nem felejti el egyetlen cselekedetünket sem!

Dr. Mattyasovszky Kasszián.

Schuller Lajos.

(1892—1915.)

Jelen füzetben közöljük Schuller Lajosnak első és — fájdalom — utolsó közleményét. Fiatal társunk, a ki alapos készültségével, lelkiismeretes munkásságával és lelkületének nemességével és jóságával szép reményekkel töltötte el mindazok szivét, kik hozzá közel állottak, a harcztéren hősi halált halt. Benne Schuller Alajos, műegyetemi tanár fiát gyászolja. Született Budapesten, 1892 szept. 14-én. Középiskolai tanulmányait a IV. ker. főreáliskolában végezte. Mint tanárjelölt a math. és phys. csoportból a tudományegyetemet és a műegyetemet látogatta Budapesten. Letette a tanári alapvizsgát és a szakvizsgát és a gyakorló évet a mintagimnáziumon készült eltölteni. Időközben a tudományegyetem II. physikai tanszékéhez gyakornoknak nevezték ki, működését azonban nem kezdhette meg, mert be kellett vonulnia. Hadapródi minőségében 1915 márczius 19-én a 304-ik honvédgyalogezred 2-ik zászlóaljával az északi harcztérre jutott, a hol a zuboviczi völgyben nehéz harczokban vett részt. Hősies viselkedésének jutalmául fölebbvalói kitüntetésre felterjesztették. Majd később nagy előretörésünk közben Stryj közelében soronkívül zászlóssá nevezték ki, de hír szerint ugyanazon tájon már néhány nappal később, május 29-én egy telitalálatú gránát súlyosan megsebesítette úgy, hogy a harcz után szállítás közben kiszenvedett. Társai a brigidaui temetőben külön sírba helyezték örök nyugalomra.

M. S.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI
LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K, A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

25. évfolyam. 1916. február–április. 2–4. füzet.

FELÜLETDARAB VÉGES MÉRŐSZÁMÁNAK SZÜKSÉGES ÉS ELÉGSÉGES FELTÉTELÉRŐL.

Jelen értekezlet célja a szükséges és elégséges feltétel közlése, a mely mellett egy $z = f(x, y)$ felület területe véges és igazolása annak, hogy a feltétel szükséges is, elégséges is.[1] Evégből először is definiáljuk a $z = f(x, y)$ felületet, aztán definiáljuk a a $z = f(x, y)$ felület területét. Némi, a feltétel megértetését megkönnyebbítő előzmény után közöljük a feltételt, aztán kimutatjuk, hogy szükséges is, elégséges is.

Végezetül egy analog tételt jelentünk ki a négy dimenziós tér $u = f(x, y, z)$ felületéről.

I. A $z = f(x, y)$ *felület definitiója.* Legyenek x, y, z derékszögű pontcoordináták és legyenek a és b véges pozitív állandók. Jelölje P a

$$0 \leqq x \leqq a, \; 0 \leqq y \leqq b, \; z = 0$$

pontok halmazát. P tehát az xy sík egy derékszögű négyszögének összes belső és kerületi pontjaiból áll.

Egy A pont a P-ben változván, legyen $f(A) = f(x, y)$ az A pont helyzetének azaz x és y coordinátáinak egyértékű, határolt és folytonos függvénye. Az $x, y, f(A)$ pontok halmazából álló idomot a $z = f(x, y)$ felületnek fogjuk nevezni.

---

[1] A szóbanforgó feltételt bizonyítás nélkül közöltem a következő munkáimban: 1. A $z = f(x, y)$ felület quadraturája. Első rész. Budapest, 1906. 2. Quadrature des surfaces courbes. C. R. 1907 febr. 14. 3. Quadrature des surfaces courbes. Math. u. nat. Ber. aus Ungarn. 1910. — A feltétel elégséges voltának a bizonyítását először a Math. és phys. Társulat 1912 nov. havi ülésén tartott előadásomban közöltem.

—. A következőkben, ha M a P egy pontja, a melynek coordinátái x', y', M° azon pontot fogja jelenteni, a melynek coordinátái x', y', $f(M)$.

II. A $z = f(x, y)$ felület területének a definitiója. Legyen δ egy az $\frac{a}{2}$ és $\frac{b}{2}$-nél kisebb pozitív szám. Legyenek ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 a δ-nál nem nagyobb pozitív számok. Legyen Q_δ egy olyan a P-be eső egyszerűen zárt sokszög belső és kerületi pontjaiból álló idom, a mely az

$$\varepsilon_1 \leqq x \leqq a - \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3 \leqq y \leqq b - \varepsilon_4$$

négyszöget tartalmazza.

Bontsuk fel a Q_δ-át véges számú és nem elfajuló háromszögekre, úgy hogy a háromszögek mindegyikének minden oldala δ nál kisebb legyen és hogy ha (a mint ez szükségkép előfordul) a háromszögek közül kettőnek közös idoma van a közös idom a két háromszög mindegyikének vagy egy csúcsa vagy egy oldala legyen.

Jelölje H_δ a P ezen háromszöges hálózatát. Legyen M a a hálózat egy szögpontja (azaz a hálózat egy vagy több háromszögének a csúcsa).

A H_δ minden M szögpontjához egy oly M' pontot veszünk fel, a melyre

$$\overline{M^\circ M'} < \delta$$

áll.

M, N, O a H_δ egy háromszögének a csúcsai lévén, jelentse Δ_δ az M', N', O' csúcsokkal biró háromszögekből álló idomot. Δ_δ tehát annyi $M'N'O'$ féle háromszögből áll, a hány MNO háromszögből áll a H_δ.

Nyilvánvaló, hogy egy adott δ-hoz a Q_δ, H_δ s az M'-féle pontok még végtelen sokféle módon választhatók s így egy δ-hoz végtelen sok Δ_δ van. Választassék ki egy Δ_δ és jelölje $\Delta_\delta t$ a területét, azaz az $M'N'O'$-féle háromszögek területeinek az összegét. Legyen $\delta_r > 0$, $r = 1, 2, \ldots$, $\lim \delta_r = 0$ $(r = \infty)$. Legyenek Q_{δ_r}, H_{δ_r}, Δ_{δ_r}, $\Delta_{\delta_r} t$ azok a δ_r-hez, a mik Q_δ, H_δ, Δ_δ, $\Delta_\delta t$ a δ-hoz.

Δ_{δ_r}, $r=1, 2,\ldots$, tehát egy számsorozat. Mint ismeretes, találhatók oly $r_i<r_{i+1}$, $i=1, 2,\ldots$, pozitív egész számok, hogy

$$\lim_{i=\infty} \Delta_{\delta_{r_i}} t$$

határozott.

δ_{r_i} helyébe δ_r-et írva látnivaló, hogy vannak olyan Δ_{δ_r} $\big(\delta_r>0$, $\lim \delta_r=0$ $(r=\infty)\big)$ sorozatok, hogy

$$\lim_{r=\infty} \Delta_{\delta_r} t$$

meghatározott.

Jelölje L azon halmazt, a melynek elemei azon összes határozott

$$\lim_{r=\infty} \Delta_{\delta_r} t$$

értékek, a melyek az összes lehetséges

$$\delta_r>0,\ r=1, 2,\ldots,\ \lim \delta_r=0,\quad r=\infty,$$

sorozatokhoz tartoznak.

Jelölje T az L alsó határát.

Állítom, hogy T az L eleme.

Legyen ugyanis

$$\eta_s>0,\ s=1, 2,\ldots,\ \lim \eta_s=0,\ s=\infty.$$

Ha T nem volna az L eleme, egy ismert tétel szerint volna olyan az L elemeiből álló L_s sorozat, hogy

$$0<L_s-T<\eta_s.$$

L_s egy $\lim\limits_{r=\infty} \Delta_{\delta_r} t$. Legyen r oly nagy, hogy

$$\delta_r<\eta_s,\ |L_s-\Delta_{\delta_r} t|<\eta_s.$$

Jelöljük ezen δ_r-et ε_s-el. Áll, hogy

$$|T-\Delta_{\varepsilon_s} t|<2\eta_s,\ \varepsilon_s<\eta_s.$$

Azaz ε_s helyébe δ_r-et, η_s helyébe η_r-et írva, van oly Δ_{δ_r} $(\delta_r>0,\ \lim\limits_{r=\infty} \delta_r=0)$ sorozat, hogy

$$T=\lim_{r=\infty} \Delta_{\delta_r} t.$$

Ezen T értéket nevezzük a $z = f(x, y)$ felület területének.[1]

III. T a $z = f(x, y)$ felületen kívül még nyilván a Δ_δ sajátságaitól, azaz Q_δ, H_δ s az M' pontok választásától függ.

Legyen Δ'_δ egy oly Δ_δ, a mely a Δ_δ II-ben vázolt sajátságain kívül még más sajátságokkal is bir.

Az ily Δ'_δ segélyével épp úgy definiálható egy T' érték, miként a T definiáltatott a Δ_δ segélyével.

Legyen ezen eljárásnál L' az L analogonja, L' nyilván része az L-nek s így $T' \geqq T$.

Legyen T_1 az a T', a melynél a Δ'_δ sajátsága az, hogy Q_δ a P-vel azonos.

Legyen T_2 az a T', a melynél a Δ'_δ sajátsága az, hogy minden M' azonos M°-al.

Legyen T_3 az a T', a melynél a Δ'_δ olyan, hogy $Q_\delta \equiv P$, $M' \equiv M^\circ$

Legyen T_4 az a T', a melynél Q_δ egy P-vel parallel oldalakkal biró négyszög s a melynél a H_δ úgy keletkezik, hogy Q_δ az x és az y tengelyekkel parallel egyenesekkel négyszögekre s ezek mindegyike egy-egy átló által két háromszögre bomlik, s a melynél még $M' \equiv M^\circ$,

Legyen T_5 az a T' a mely a T_4 módjára származik, ha még $Q_\delta \equiv P$.

A T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 sorban a nagyobb rendszámú tag *általában* nem kisebb az alacsonyabb rendszámúnál, de T_1 és T_2, T_1 és T_4, T_3 és T_4 nagyságú viszonya kétséges.

A T_1—T_5 értékek akármelyike is választható a terület definitiója gyanánt.

IV. *Teljes ingadozás.* Legyenek c és d véges állandók, legyen $c < d$ és legyen $\varphi(x)$ az x változónak a (c, d) intervallumban, egyértékű, határolt és folytonos függvénye. Legyen $x_0, \ldots x_i, \ldots x_n$ (c, d)-nek egy beosztása, azaz legyenek az x_i pontok olyanok, hogy

$$c = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = d.$$

---

[1] LEBESGUE: Intégrale, Longueur, Aire. 1902.

Ismeretes, hogy

$$\lim \sum_0^{n-1}{}_i |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|, \; n = \infty, \; x_{i+1} - x_i = 0,$$

létező és független az x_i pontokról. Ezen érték nem negatív, lehet $+\infty$ is neve a $\varphi(x)$ teljes ingadozása a (c, d)-ben. Ha ezen érték véges, úgy a $\varphi(x)$-et határolt ingadozású (folytonos) függvénynek nevezzük. A

$$\sum_0^{n-1}{}_i |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)|$$

érték nem nagyobb a teljes ingadozásnál. Ha (u, v) egy a (c, d)-be eső intervallum, úgy az (u, v)-re képezett teljes ingadozás nem nagyobb, mint a (c, d)-re képezett és az (u, v)-re képezett teljes ingadozás határértéke $u = c$, $v = d$-re a teljes ingadozás. x és y derékszögű pontcoordinátákat jelentvén, annak, hogy az $y = \varphi(x)$ görbének véges ivhossza legyen, szükséges és elégséges feltétele az, hogy φ határolt ingadozású legyen.[1]

Alsó integrál. Legyen $\psi(x)$ egy a (c, d)-ben definiált nem negativ függvény, mely nem szükségkép egyértékű és a melynek értékkészletében a $+\infty$ is előfordulhat.

Legyen (e, f) a (c, d) egy intervalluma. Jelölje $g^\psi(e, f)$ a ψ azon értékeinek az alsó határát, a melyek x argumentumára

$$e \leqq x \leqq f,$$

áll. Legyen $x_0, \dots x_i, \dots x_n$ a (c, d) egy beosztása.

Ismeretes, hogy

$$\lim \sum_0^{n-1}{}_i g^\psi(x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i), \; n = \infty, \; x_{i+1} - x_i = 0$$

létező és független az x_i pontoktól. E nem negatív értéknek mely $+\infty$ is lehet a neve $\psi(x)$ alsó integrálja a (c, d)-ben. Jele

$$\underline{\int_c^d} \psi(x)\, dx.$$

[1] Ezen s az alsó integrálra vonatkozó állításokra nézve lásd LEBESGUE: Leçons sur l'intégration. Jordan. Cours d'Analyse. megfelelő helyeit.

Ha (e, f) a (c, d) egy intervalluma áll, hogy

$$\lim_{\substack{e=c\\ f=d}} \int_c^f \psi(x)\, dx = \int_c^d \psi(x)\, dx.$$

Jelentse $g^{\psi}(e, f)'$ azon ψ értékek alsó határát, melyek a x argumentumára

$$e < x < f$$

áll. Ismeretes, hogy

$$\sum_0^{n-1}{}^i g^{\psi}(x_i, x_{i+1})' \cdot (x_{i+1} - x_i) \leqq \int_c^d \psi(x)\, dx.$$

A feltétel. Legyen x a $(0, a)$ egy értéke. A $z = f(x, y)$-ban az x-nek ezen értéket adva $f(x, y)$ az y-nak nyilván egyértékű, határolt és folytonos függvénye míg

$$0 \leqq y \leqq b.$$

Legyen $H(x)$ e függvény teljes ingadozása a $(0, b)$-ben. $H(x)$ tehát minden oly x-re, a melyre

$$0 \leqq x \leqq a$$

áll, definiált egyértékű és nem negativ függvény.

Legyen y a $(0, b)$ egyértéke. A $z = f(x, y)$ függvényben y-nak ezen értéket adva $f(x, y)$ az x-nek nyilván egyértékű, határolt és folytonos függvénye, a míg

$$0 \leqq x \leqq a.$$

Legyen $I(y)$ e függvény teljes ingadozása a $(0, a)$-ban $I(y)$ tehát minden oly y-ra, a melyre

$$0 \leqq y \leqq b$$

definiált, egyértékű és nem negativ függvény.

Annak, hogy T véges legyen szükséges feltétele az, hogy

$$\int_0^a H(x)\, dx + \int_0^b I(y)\, dy$$

véges legyen. E feltétel elégséges is.

A feltételben szereplő érték, tehát a $z = f(x, y)$ felület területét illetőleg épp oly vonatkozású, mint a teljes ingadozás az ívhosszra nézve. Megemlítjük, hogy vannak oly $z = f(x, y)$ felületek, a melyeknél ama x helyek sokasága, a melyeken $H(x) = \infty$ a $(0, a)$-ban mindenütt sűrű, míg a T véges.

A feltétel szükségességének a kimutatása.

Kimutatjuk előbb (V—X), hogy a feltétel a T_1 (l. III) végességére szükséges.

V. *Segédtételek a függvénytanból.* Legyenek $h_r(x)$, $r = 1, 2, \ldots$, a $(0, a)$-ban definiált, nem negatív, egyértékű, határolt és folytonos függvények, a melyekre

$$h_r(x) \leq h_{r+1}(x), \; r = 1, 2, \ldots,$$

áll.

$$H(x) = \lim_{r=\infty} h_r(x),$$

tehát egy egyértékű, nem negatív függvény (értékei közt a $+\infty$ előfordulhat).

Nyilván

$$\int_0^a h_r(x)\, dx \leq \int_0^a h_{r+1}(x)\, dx$$

s így

$$\lim_{r=\infty} \int_0^a h_r(x)\, dx$$

meghatározott.

Áll, hogy

$$\lim_{r=\infty} \int_0^a h_r(x)\, dx = \int_0^a H(x)\, dx.^{1}$$

Legyenek a $H_r(x)$, $r = 1, 2, \ldots$, függvények olyanok, hogy mindegyikük, nem fogyó folytonos és nem negatív függvények sorának a határértéke-e függvények a $(0, a)$-ban lévén definiálva. Legyen még

---

[1] Zoárd de Geöcze: Sur la fonction semicontinue. Bulletin de la société mathématique de France, 1911.

$$H_r(x) \leqq H_{r+1}(x),\ r = 1, 2, \ldots$$
$$H(x) = \lim_{r=\infty} H_r(x),$$

tehát egy nem negatív, egyértékű és a $(0, a)$-ban definiált függvény.

Legyen (u, v) a $(0, a)$ egy intervalluma. *Áll, hogy*

$$\lim_{r=\infty} \int_u^v H_r(x)\,dx = \int_u^v H(x)\,dx.$$

VI. Legyen $y_0, \ldots, y_j, \ldots y_m$ a $(0, b)$-nek egy beosztása, azaz legyenek

$$0 = y_0 < y_1 < \cdot < y_j < \cdots < y_n = b.$$

Jelöljük e beosztást θ-val.

Legyen μ egy tetszőleges pozitív szám.

Állítom, hogyha δ elég kicsi és $Q_\delta \equiv P$ (l. III.), akkor bármilyen is külömben a Δ_δ

$$\Delta_\delta t \geqq \int_0^a \left(\sum_0^{m-1}{}^j |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|\right) dx - \mu, \tag{1}$$

Fogadjuk el ezen állítást. Az integrál jel alatt álló függvény jele legyen $h(x)$. $h(x)$, nem negatív nyilván egyértékű, határolt és folytonos. Legyenek $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_r, \ldots$, oly beosztások, hogy θ_{r+1} a θ_r pontjait tartalmazza $(r = 1, 2, \ldots)$ és hogy a θ_r bármely két szomszédos pontjának egymástól való távolsága az r nőttével a zérus felé tartson. Legyen $h_r(x)$ az a θ_r-hez, a mi h a θ-hoz. A IV. szerint $-h_r(x)$ jelentését tekintetbe véve

$$h_r(x) \leqq h_{r+1}(x),\ \lim_{r=\infty} h_r(x) = H(x).$$

Így az V. szerint

$$\lim_{r=\infty} \int_0^a h_r(x)\,dx = \int_0^a H(x)\,dx.$$

Ha μ a zérus felé tart, úgy ha δ az (1)-nek eleget téve tart a zérus felé Δ_δ nyilván választható úgy, hogy

$$\lim_{\delta=0} \Delta_\delta t = T_1.$$

Így tehát

$$T_1 \geqq \int_0^a h(x)\,dx$$

és épp így

$$T_1 \geqq \int_0^a h_r(x)\,dx,$$

azaz

$$T_1 \geqq \lim_{r=\infty} \int_0^a h_r(x)\,dx = \int_0^a H(x)\,dx.$$ [1]

Legközelebbi czélunk tehát az (1) kimutatása.

VII. Legyen

$$\lambda_j(x) = f\,|\,(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|.$$

---

[1] Azon egyenlőtlenség helyessége, a mely az (1)-ből keletkezik, ha T_1 helyébe T_3 iratik könnyen kimutatható. Ekkor ugyanis a Δ_δ is nyilván egy $z = f(x, y)$ féle felület. Legyen $z = g_\delta(x, y)$ a Δ_δ. Nyilván

$$|f(x, y) - g_\delta(x, y)| < \nu \qquad (\alpha)$$

itt ν egy oly érték, a mely a δ-val egyenletesen tart a zérus felé (l. IX.). Tekintsük a Δ_δ azon részét, a melynek az xy síkra való merőleges vetülete az $y = y_j$, $y = y_{j+1}$ egyenesek közé esik. E résznek $x = x$ metszete tartalmaz egy oly törtvonalat, a melynek egyik vége az $y = y_j$, másik vége az $y = y_{j+1}$ síkban van. E törtvonal merőleges vetülete az xz síkra, nyilván tartalmazza a végei vetületeinek összekötő távolságát, e végek egyike az xz sík $z = g_\nu(x, y_j)$, másika az xz sík $z = g_\delta(x, y_{j+1})$ törtvonalán van. Így a Δ_δ említett részének az xz síkra való merőleges vetülete tartalmazza az említett két törtvonal s az $x = 0$, $x = a$ egyenesek által «bezárt» területet. E terület

$$\int_0^a |g_\delta(x, y_j+1) - g_\delta(x, y_j)|\,dx$$

s ezen érték nyilván nem nagyobb, mint a Δ_δ említett részének a területe. Δ_δ m ily részből áll s így

$$\Delta_\delta t \geqq \int_0^a \Big(\sum_0^{m-1}{}^j |g_\delta(x, y_{j+1}) - g_\delta(x, y_j)|\Big)\,dx.$$

Az (α) tekintetbe vételével

$$\Delta_\delta t \geqq \int_0^a \Big(\sum_0^{m-1}{}^j |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|\Big)\,dx - 2m\,.\,a\,.\,\nu$$

és $2ma\nu < \mu$ hacsak δ elég kicsi.

Ha minden j-re $\lambda_j(x) = 0$ volna, úgy az (1) nyilván helyes lenne. Ne legyen tehát $\lambda_j(x) = 0$, minden j és x-re.

$\lambda_j(x)$ nyilván egy közönséges folytonos és sohase negatív függvény. A folytonos függvényekről szóló tételek szerint mindama x helyek összessége, a melyekre $\lambda_j(x) = 0$ egy zárt sokaságot képez. E zárt sokaság kiegészítő sokasága nyilván mindama helyekből áll, a melyekre $\lambda_j(x) > 0$; azaz $\lambda_j(x) > 0$ egy oly sokaságon, a mely bizonyos (c_i, d_i) intervallumok összes belső pontjaiból, a mely intervallumoknak, kettenként véve őket, közös belső pontjuk nincs s esetleg még a 0 és a pontokból áll.

Ismeretes továbbá, hogy

$$\int_0^a \lambda_j(x)\, dx = \sum_1^{n_j} {}_i \int_c^d \lambda_j(x)\, dx$$

itt az n_j jel ha a (c_i, o_i) intervallumok száma véges e véges szám, míg ha a (c_i, d_i) intervallumok száma végtelen, az n_j a ∞ jelet jelenti.

A P leképezése a Δ_δ-ra, ha $Q_\delta \equiv P$. $Q_\delta \equiv P$ lévén, legyen A a P egy pontja. Az A-hoz a Δ_δ egy A' pontját rendeljük a következő módon. Az A a H_δ egy vagy több háromszögének a pontja (mert $Q_\delta \equiv P$). Legyen MNO a H_δ egy oly háromszöge, a melynek A a pontja. Ha például $A \equiv M$, az M' legyen az A'. Ha A az $\overline{MN}$ pontja, úgy az A mint az M és N-be helyezett pozitív tömegek súlypontja fogható fel. Vigyük az M illetve N-ben levő tömeget M' illetve N'-be. A' e tömegek súlypontja lesz. Ha A az MNO egy belső pontja úgy az A az M, N, O pontokba helyezett pozitív tömegek súlypontja, ugyane tömegeket vive M', N', O'-be az A' e tömegek súlypontja lesz. A' tehát az $M'\ N'\ O'$-ba esik.

Látnivaló, hogy a P így egyértelműen és folytonosan képeztetik le Δ_δ-re. A leképezés egy MNO háromszögre megfordíthatóan egyértelmű, ha $M'N'O'$ nem fajul el.

—. Legyen $Q_{i,j}$ az xy sík

$$c_i \leqq x \leqq d_i, \quad y_j \leqq y_j \leqq y_{j+1}$$

négyszöge.

Legyen $\overline{Q}_{i,j}$ a Δ_δ azon része, a mely áll a $Q_{i,j}$ képéből.

Legyen MNO a H_δ egy oly háromszöge, a melynek a $Q_{i,j}$ belsején pontja van.

Egy ily MNO-nak és a $Q_{i,j}$-nek a közös pontjaiból álló idom egy közönséges sokszög.[1] $\overline{Q}_{i,j}$ az ezensokszögeknek az előbb említett módon képezett képeiből áll, — e képek nyilván síksokszögek. Legyen e síksokszögek területeinek az összege $\overline{Q}_{i,j}$.

Áll, hogy

$$\Delta_\delta t \geqq \sum_{0}^{m-1} j \sum_{1}^{nj} i\, \overline{Q}_{i,j} t$$

mert a P-nek a $\Delta_\delta t$-re való leképezése az MNO háromszögben belül megfordíthatóan egyértelmű, ha $M'N'O'$ nem fajul el és ha $M'N'O'$ elfajul, területe zérus, és két különböző $Q_{i,j}$-nek közös belső pontja nincs.

Ki fogjuk mutatni, hogy *egy előre adott pozitív* ν *számhoz hacsak* δ *elég kicsi.*

$$Q_{i,j} t \geqq \int_{ci}^{di} \lambda_j(x)\, dx - \nu. \tag{2}$$

Tegyük fel, hogy (2) helyes. Legyen 0_j oly nagy egész szám ($j = 0, \ldots m-1$), hogy

$$\sum_{1}^{nj} i \int_{ci}^{di} \lambda_j(x)\, dx - \sum_{1}^{0_j} i \int_{ci}^{di} \lambda_j(x)\, dx < \frac{\mu}{2m}$$

legyen, — μ az (1) értéke.

Ha δ elég kicsi a (2) szerint

$$\overline{Q}_{i,j} t \geqq \int_{ci}^{di} \lambda_j(x)\, dx - \frac{\mu}{2m0_j} \quad j = 0, \ldots m-1, \; i = 1, \ldots 0_j.$$

Azaz, tekintetbe véve azt, hogy két külömböző $Q_{i,j}$-nek közös belső pontja nincs s a leképezés sajátságait

---

[1] Ha δ elég kicsi e közös rész egy legfeljebb ötoldalú sokszög.

$$\Delta_\delta t \geq \sum_0^{m-1}{}_j \sum_1^{Oj}{}_i \int_{ci}^{di} \lambda_j(x)\,dx - \frac{\mu}{2},$$

vagyis

$$\Delta_\delta t \geq \sum_0^{m-1}{}_j \sum_1^{nj}{}_i \int_{ci}^{di} \lambda_j(x)\,dx - \mu = \sum_0^{m-1}{}_j \int_0^a \lambda_j(x)\,dx - \mu =$$

$$= \int_0^a \left(\sum_0^{m-1}{}_j \lambda_j(x)\right) dx - \mu$$

azaz, ha a (2) helyes (1) is az, *s így a* (2) *mutatandó ki.*

VIII. Tekintsük ama C görbét, mely az xz síkba esve a következő négy részből áll:

1. A $z = f(x, y_j)$ és 2. a $z = f(x, y_{j+1})$ görbének $c_i \leq x \leq d_i$ darabjaiból. 3. Azon távolságokból, a melyek e két görbének a c_i 4. $d_i\, x$ coordinátáival biró végeit kötik össze. A 3. és 4. egy ponttá redukálódik, hacsak nem $c_i = 0$ vagy $d_i = a$. Az 1. és 2.-nek közös pontja a (c_i, d_i) belsején nincs. Ezen két állítás helyessége a $\lambda_j(x)$ sajátságaiból következik.

Mint ismeretes, C a síkot két részre bontja. Továbbá a görbe által «bezáıt résznek» területe van s e terület

$$\int_{ci}^{di} \lambda_j(x)\,dx.$$

E terület, mint ismeretes, felső határa mindama L egyszerűen zárt sokszögek L területének, a melyek a görbe által bezárt síkrészbe esnek. Legyen L egy ily sokszög L' az L, C' a C egy pontja. Az összes $\overline{L'C'}$ távolságok alsó határa legyen χ, nyilván $\chi > 0$.

Ki fogjuk mutatni, hogy felvehető egy a χ-tól függő pozitív δ, úgy hogy a $\overline{Q}_{i,j}$, (a $Q_{i,j}$ a δ-hoz felvett H_δ által van meghatározva) *pontjainak az xz síkra való merőleges vetületeiből álló F idom az L minden* (kerületi és belső) *pontját tartalmazza.*

Ámde így egy elemi tétel szerint — $\overline{Q}_{i,j}$ síklapokból állván

$$\overline{Q}_{i,j} t \geq L.$$

Ha tehát L úgy vétetik fel, hogy

$$L \geqq \int_{c_i}^{d_i} \lambda_j(x)\,dx - \nu$$

a (2) helyes lesz.

IX. Czélunk tehát a VIII-ban foglalt állítás kimutatása.

Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy $\overline{A^\circ A'}$ (l. I. VII.) a δ-val egyenletesen tart a zérus felé. Azaz akármily pozitív χ-hoz is van oly δ, hogy a H_δ-hoz való A're $\overline{A^\circ A'} < \chi$ bármilyen is legyen külömben a H_ϑ.

Legyen B és C a P két oly pontja, a melyekre $\overline{BC} < 2\delta$ és legyen χ' az összes $\overline{B^\circ C^\circ}$ értékek felső határa. A felület folytonossága miatt χ' a δ-vel egyenletesen tart a zérus felé.

Nyilván — MNO lévén a H_δ egy oly háromszöge, a melynek A a pontja

$$\overline{A^\circ A'} \leqq \overline{A^\circ M^\circ} + \overline{M^\circ M'} + \overline{M'A'}.$$

Ámde

$$\overline{A^\circ M^\circ} \leqq \chi'$$

mert

$$\overline{AM} < MN + NO \leqq 2\delta;\ \overline{M^\circ M'} \leqq \delta.$$

Továbbá

$$\overline{M'A'} \leqq \overline{M'N'} + \overline{N'O'},$$

$$\overline{M'N'} \leqq \overline{M'M^\circ} + \overline{M^\circ N^\circ} + \overline{N^\circ N'} \leqq \delta + \chi' + \delta = 2\delta + \chi'$$

és épp így

$$\overline{N'O'} \leqq 2\delta + \chi'$$

azaz

$$\overline{A^\circ A'} \leqq \chi' + \delta + 2\delta + \chi' + 2\delta + \chi' = 5\delta + 3\chi'$$

és $5\delta + 3\chi'$ nyilván a δ-val együtt egyenletesen tart a zérus felé. δ oly kicsi legyen l. (2), hogy $5\delta + 3\chi' < \chi$.

—. Fussuk be a $Q_{i,j}$ kerületét azon csúcsától S_1-től kezdve, a mely legközelebb b esik a coordináták kezdőpontjához úgy hogy előbb azon oldalát a $Q_{i,j}$-nek futjuk be, a mely (az S_1-ből kiindulva) az y tengelylyel parallel, legyenek a sorban talált csúcsai a $Q_{i,j}$-nek S_2, S_3, S_4.

A' és A° így egy-egy α, β görbét irnak le.

Az elébbiek szerint, α a β-nak egy oly folytonos deformátiójából keletkezhet, a melynek tartalma alatt az α pontjai eredeti helyüktől χ-nál messzebb nem távoznak.[1]

Helyettesítsük az A° pontot míg az A az $\overline{S_1S_2}$-ön mozog az $\overline{S_1^\circ S_2^\circ}$ ama $A^{[\circ]}$ pontjával, a melynek az xy síkra való merőleges vetülete az A.

Épp így helyettesítsük az A° pontot, a míg az A az $\overline{S_3S_4}$-en mozog az $\overline{S_3^\circ S_4^\circ}$ ama $A^{[\circ]}$ pontjával, a melynek az xy síkra való merőleges vetülete az A.

Legyen az így nyert görbe γ. β nyilván a γ-nak egy oly folytonos deformatiójától keletkezhet, hogy a γ-nak csakis az $A^{[\circ]}$ féle pontjai mozognak az $\overline{A^{[\circ]}A^\circ}$ távolságokon.[2]

Legyenek α', β', γ' az α, β, γ görbéknek az xz síkra való merőleges vetületei. Látnivaló, hogy a γ' ugyanazon pontokból áll, mint a c (l. VIII.).

Mivel α a β-nak, β a γ-nak fent leirt folytonos deformatiójából keletkezik, úgy nyilvánvaló, hogy α' a γ'-ból oly módon keletkezhet folytonos deformatió által, hogy γ' helyzetei a γ helyzeteinek az xz síkra való merőleges vetületei. γ mozgását míg β-án át α lesz tekintetbe véve látnivaló, hogy γ' mozgása alatt csak oly oly pontokon halad át, a melyek vagy az 1. és 2. (l. VIII.) görbéktől nincsenek χ-nál messzebb, vagy pedig az $x = c_i$, $x = d_i$ egyenesektől χ-nál nincsenek messzebb. Könnyű látni, hogy az ily pontok, ha a c által bezárt sík-

---

[1] Kezdődjék a deformatió az idő 0 értékénél és tartson 1-ig. Legyen $0 \leq t \leq 1$. E t időben a β A° pontjának az $\overline{A^\circ A'}$ távolság ama A_t pontja legyen a helye, a melyre

$$\frac{\overline{A^\circ A_t}}{\overline{A^\circ A'}} = t.$$

[2] E deformatiót is az elébbihez hasonló módon vehetjük fel.

részbe esnek, a c-től χ-nél messzebb nem lehetnek. *Azaz a γ' míg α' lesz az L-nek egy pontját se súrolja.*

X. A γ nyilván megfordíthatóan egyértelmű és folytonos képe a $Q_{i.j}$ kerületének. Ugyanez áll a γ'-re is, hacsak nem $\overline{S_1^0 S_2^0}$ és $\overline{S_3^0 S_4^0}$ egyike vagy másika vagy mind a ketteje nem parallel az y tengelylyel, mikor is az $\overline{S_1 S_2}$ illetve $\overline{S_3 S_4}$ minden pontjának csak egy pont felel meg a γ'-en.

A JORDAN-féle görbetétel szerint[1] egy a γ' sajátságait mutató görbe a síkot két részre bontja. (Ezt γ'-ről a jelen esetben egyébként is tudjuk.) És egy SCHOENFLIESS-től származó tétel szerint,[2] *ha egy ily görbe a síkjában való folytonos deformatióval egy ponttá zsugorodik össze, a mozgó görbe súrolja a görbe által bezárt síkrész minden pontját.*

A $Q_{i,j}$ kerülete a $Q_{i,j}$-ben maradva folytonos deformatióval nyilván egy ponttá zsugorodhat össze. Ámde $\overline{Q}_{i,j}$ a $Q_{i,j}$-nek egyértelmű és folytonos képe. Így tehát α a $\overline{Q}_{i,j}$-n maradva, folytonos deformatióval egy ponttá zsugorodhat össze. Így α' az F-en (l. VIII.) maradva folytonos deformatióval egy ponttá zsugorodhat össze.

Ha tehát a γ' úgy zsugorodik egy ponttá, hogy előbb a leírt módon β'-be, aztán α'-be megy át, akkor az L (l. IX.) súrolva lesz, de e súrolás csakis a γ'-nek α' helyzete után következhet be. Mert L a γ'-tól χ-nél messzebb van. Ámde e helyzettől kezdve az α' tekinthető a deformatiót végező idomnak és α' az F-en maradva is zsugorodhat folytonos deformatióval egy ponttá. *Igy tehát az L kerületi és belső pontjai szükségkép pontjai az F-nek.* Igy tehát a (2) (l. VII.) igaz és így a VI.

$$T_1 \geqq \int_0^a H(x)\,dx$$

állítása is igaz.

---

[2] L. JORDAN: Cours d'Analyse, Schoenfliess, Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten.

[2] L. TANNERY: Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. T. II. p. 469.

XI. Ezek után kimutatjuk, hogy

$$T \geqq \int_0^a H(x)\, dx.$$

Legyenek u, v, s, t oly számok, hogy

$$0<u<v<a, \quad 0<s<t<b.$$

Legyen Q az

$$u \leqq x \leqq v, \quad s \leqq y \leqq t$$

négyszög.

A $z = f(x, y)$ definiálva van a Q-ban. Képezhető tehát egy $T_{1, Q}$ érték, a mely ugyanaz a Q-hoz, mint a T_1 a P-hez.

Állítom, hogy $T \geqq T_{1, Q}$.

Ugyanis legyen $\varDelta_{\delta_r}$ egy oly sorozat, a melyre $\lim\limits_{r=\infty} \varDelta_{\delta_r} t = T$. Ha r elég nagy, a Q a Q_{δ_r}-be esik (l. II.). Legyen $\varDelta^Q_{\delta_r}$ a $\varDelta_{\delta_r}$ ama része, a mely a Q pontjainak oly módon felel meg, mint a VII-ben $\overline{Q}_{i,j}$ a $Q_{i,j}$-nek. Legyen $\varDelta^Q_{\delta_r} t$ az a Q-hoz, a mi $Q_{i,j} t$ a VII.-ben volt a $Q_{i,j}$-hez. Nyilván (mint a VII. hasonló esetében)

$$\varDelta_{\delta_r} t \geqq \varDelta^Q_{\delta_r} t. \tag{a}$$

Legyen MNO a H_{δ_r} (l. II.) egy oly háromszöge, a melynek a Q-val közös belső pontja van.

Az MNO-nak a Q-val való közös pontjaiból álló idom, mint tudjuk (l. VII.) egy közönséges, legfeljebb ötoldalú sokszög. Ha háromoldalú, tartsuk meg, ha négy, illetve ötoldalú, bontsuk átlókkal két, illetve három oly háromszögre, a melyeknek közös belső pontjai nincsenek.

Az összes így nyert háromszögek a Q-nak nyilván egy oly háromszöges hálózatát képezik, a mely ugyanolyan a Q-hoz, mint a T_1 definiálásánál (l. III.) használt H_δ a P-hez.

Legyenek U, V, Z e hálózat egy háromszögének a csúcsai. Nyilván az UVZ háromszögoldalai kisebbek $2\delta_r$-nél és $\overline{U'U^\circ}$, $\overline{V'V^\circ}$, $\overline{Z'Z^\circ}$ a $2\delta_r$-vel együtt egyenletesen tartanak a zérus felé (l. VII. hasonló esetét). Ámde így az $U'V'Z'$ háromszögekből összetett $\varDelta^Q_{\delta_r}$ felület épp úgy származik a Q-ból, mint a T_1

definiálásánál használt $\Delta\delta_r$ a P-ből (csak δ_r helyébe egy más a δ_r-el együtt a zérus felé convergáló érték lép). Továbbá $\overline{\Delta_{\delta_r}^{Q}}$ területe éppen $\Delta_{\delta_r}^{Q}t$.

— Legyen $H_{s,t}(x)$ a $z = f(x, y)$ $x = \text{const.}$ metszetének teljes ingadozása az (s, t)-ben. A VI-ben állított s a X-ben végleg kimutatott a T_1-re vonatkozó tételt a Q-ra alkalmazva

$$T \geqq T_{Q1} \geqq \int_{u}^{v} H_{s,t}(x)\,dx \qquad (\beta)$$

nyerték.

Legyenek s_r, t_r $r = 1, 2, \ldots,$ az s, t-nek oly értékei, hogy $s_r < s_{r+1}$, $t_r > t_{r+1}$, $\lim s_r - 0$, $\lim t_r = b$, $r = \infty$. A IV. szerint

$$H_{s_r,\, t_r}(x) \leqq H_{s_{r+1},\, t_{r+1}}(x)$$

és

$$\lim_{r=\infty} H_{s_r,\, t_r}(x) = H(x).$$

Ha tehát állandó u és v mellett az s és a t e sorozatokon változik, úgy nyilván

$$T \geqq \int_{u}^{v} H(x)\,dx$$

nyeretik a (β)-ból (l. V.).

Ha még u a zérus, v az a felé közeledik, úgy nyilván (l. IV.)

$$T \geqq \int_{0}^{a} H(x)\,dx$$

nyeretik.

Ugyanígy nyerhető

$$T \geqq \int_{0}^{b} I(y)\,dy$$

azaz

$$2T \geqq \int_{0}^{a} H(x)\,dx + \int_{0}^{b} I(y)\,dy,$$

vagyis a feltétel a T s annál inkább a $T_1 - T_5$ végességére szükséges.

XII. A feltétel elégséges.

Legyen $\delta > 0$. Osszuk a $(0, a)$ s a $(0, b)$ intervallumot, annyi $l-1$, illetve $m-1$ egyenlő részre, hogy e részek mindegyike $< \frac{\delta}{4}$ legyen. Legyenek a $(0, a)$, illetve a $(0, b)$ e beosztásai

$$x_0, \ldots x_i, \ldots x_{l-1}, \quad y_0 \ldots y_j, \ldots y_{m-1}.$$

Legyen ξ_i az (x_{i-1}, x_i)-nek $i = 1, \ldots l-1$, oly *belső* pontja, hogy (l. III.)

$$H(\xi_i) > g^H(x_{i-1}, x_i)' + \delta$$

legyen.

Legyen η_j az (y_{j-1}, y_j)-nek $j = 1, \ldots m-1$ oly belső pontja, hogy

$$y(\eta_j) < g^y(y_{j-1}, y_j)' + \delta$$

legyen.

Az $x = \xi_i$, $y = \eta_j$ egyenesek (ez egyenesek egymástól mind külömbözők) s a P kerülete a P-et $l \cdot m$ négyszögre bontják s e négyszögek oldalai $\frac{\delta}{2}$-nél átlói így δ-nál kisebbek. Bontsuk fel e négyszögek mindegyikét ama átlójával, a mely nem megy át a négyszögnek a kezdőponthoz legközelebbi csúcsán két-két háromszögre. Legyen egy ily háromszög ABC. Legyen t az $A^\circ B^\circ C^\circ$ háromszög xz síkra való merőleges vetületének a területe.

A

$$\xi_1 \leq x \leq \xi_{l-1}, \quad \eta_1 \leq y \leq \eta_{m-1}$$

négyszög nyilván egy Q_δ lehet (l. II.), H_δ a belé eső ABC féle háromszögekből, Δ_δ az $A^\circ B^\circ C^\circ$ féle háromszögekből állhat Δ_δ tehát a T_4 (l. III.) Δ'_δ-jának a sajátságával bir.

E Δ_δ háromszögeinek a száma $2(l-2)(m-2)$. Legyen π a reájuk vonatkozó t féle értékek összege. π nyilván nem kisebb, mint azon t féle értékek összege; a melyek oly háromszögekhez vafók, a melyek egy oldala az $x = \xi_i$, $i = 1, \ldots l-1$ egyenesen van. Ha $\xi_0 = 0$, $\xi_l = a$, $\eta_0 = \eta$, $\eta_m = b$ vétetik ezen összeg

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{l-1} i\left[\left(\sum_{0}^{m-1} j\left|f(\xi_i, \eta_{j+1}) - f(\xi_i, \eta_j)\right|\right)(\xi_{i+1}-\xi_{i-1})\right].^{1}$$

Ámde az x_i s a ξ_i pontok felvétele szerint

$$\xi_{i+1} - \xi_{i-1} \leqq 3(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, \ldots l-1,$$

$$\sum_{0}^{m-1} j\left|f(\xi_i, \eta_{j+1}) - f(\xi_i, \eta_j)\right| \leqq H(\xi_i) \leqq g^H(x_{i-1}, x_i)' + \delta,$$

azaz:

$$\pi \leqq \frac{3}{2}\sum_{1}^{l-1} i\, g^H(x_{i-1}, x_i)'(x_i - x_{i-1}) + \frac{3}{2}\cdot\delta\,.\,a$$

vagyis (l. IV.)

$$\pi \leqq \frac{3}{2}\int_0^a H(x)\,dx + \frac{3}{i}\cdot\delta\cdot a.$$

Tekintetbe véve, hogy δ tetszőleges nyilvánvaló, hogy π egy a δ-tól független véges értéknél kisebb — hacsak δ elég kicsi. Épp így a Δ_δ háromszögeinek az yz síkra való merőleges vetületei területeinek az összege — hacsak δ elég kicsi, kisebb egy a δ-tól független véges értéknél. A Δ_δ háromszögeinek az xy síkra való merőleges vetületei területeinek az összege pedig nyilván $< a \cdot b$. De így egy elemi tétel szerint $\Delta_\delta t$ — hacsak δ elég kicsi — kisebb egy a δ-tól nem függő véges határnál.

---

[1] Ugyanis azon ABC-féle háromszögek, a melyeknek t értékét összegezzük és a melyeknek az $x = \xi_i$ egyenesen egy-egy oldala van csúcsainak xy cordinátái

$$\xi_i, \eta_j, \xi_i, \eta_{j+1}, \xi_{i-1}, \eta_{j+1}, j = 0, \ldots m-1,$$
$$\xi_i, \eta_j, \xi_i, \eta_{j+1}, \xi_{i+1}, \eta_j, j = 0, \ldots m-1.$$

E háromszögeknek megfelelő t értékek nyilván

$$\tfrac{1}{2}\left|f(\xi_i, \eta_{j+1}) - f(\xi_i, \eta_j)\right|(\xi_i - \zeta_{i-1}), \; j = 0, \ldots m-1.$$
$$\tfrac{1}{2}\left|f(\xi_i, \eta_{j+1}) - f(\xi_i, \eta_j)\right|(\xi_{i+1} - \xi_i), \; j = 0, \ldots m-1.$$

E t értékek összege nyilván

$$\tfrac{1}{2}\sum_{0}^{m-1} j\left|f(\xi_i, \eta_{j+1}) - f(\xi_i, \eta_j)\right|\cdot(\xi_{i+1} - \xi_{i-1})$$

és ezen utóbbi összeget $i = 1, \ldots$ l—1-re képezve ezek összege a szöveg értéke.

Azaz (l. II. és III.) T_4 *s annál inkább* T *véges érték.*

Bizonyitás nélkül közlöm a következőket. *A föltétel elegendő a* T_3 *végességére is és ha*

$$H(0)+H(a), \quad I(0)+I(b)$$

legalább egyike véges, úgy a feltétel elégséges a T_5 *végességére is. A feltétel tehát elégséges a* T_1-T_4 *végességére is.*

Az $u=f(x, y, z)$ *felületről.* Legyenek $x, y, z\ u$ a négyméretű euklidesi tér derékszögű pontcoordinátái. Legyen P az x, y, z tér ama téglaalakú testje, a mely áll a

$$0 \leqq x \leqq a, \quad 0 \leqq y \leqq b, \quad 0 \leqq z \leqq c$$

pontokból, a, b, c, véges pozitív állandókat jelentvén.

Az $A \equiv x, y, z, 0$ pont a P-ben változván, legyen

$$f(A)=f(x, y, z)$$

az A pont helyzetének egyértékű, határolt és folytonos függvénye.

Mindama pontok halmazából álló idomot, a mely pontok x, y, z, u coordinátái rendre $x, y, z, f(x, y, z)$-vel egyenlők a $z=f(x, y, z)$ felületnek nevezzük. Ha M a P egy x, y, z pontja jelölje M° az $x, y, z, f(x, y, z)$ pontot.

Legyen δ egy az $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$-nél kisebb pozitív szám. Legyenek $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_6$ a δ-nál kisebb pozitív számok. Legyen Q_δ egy olyan a P-be eső polyeder, a mely a teret két részre bontja és a melybe a

$$\varepsilon_1 \leqq x \leqq a-\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3 \leqq y \leqq b-\varepsilon_4, \quad \varepsilon_5 \leqq z \leqq c-\varepsilon_6$$

téglaalakú test belé esik.

Bontsuk fel a Q_δ-át véges számú és nem elfajuló tetraederre, úgy hogy éleik mind kisebbek legyenek δ-nál, és hogy e tetraederek közül bármely kettőnek vagy csak egy csúcsa, vagy csak egy éle, vagy csak egy oldallapja lehessen közös. Legyen M e tetraederes háló egy szögpontja. Legyen M' egy oly pont, hogy $\overline{M^\circ M'} < \delta$. Legyen $MNOR$ a hálózat egy tetraedere. Adjuk össze az $M'N'O'R'$ féle tetraederek köbtartalmait (ezen összeg annyi tagból áll, a hány tetraedere van a hálózatnak).

Ezen összeg segélyével a $\delta = 0$ határra átmenve épp úgy definiálunk egy értéket, miként a T definiáltatott (l. II.). Ezen értéket az $z = f(x, y, z)$ területének nevezzük. A terület nyilván nem negatív.

Legyen x és y állandók. Legyenek $H_{x,y}(x, y)$ az $f(x, y, z)$ teljes ingadozása (x és y állandók) a $(0, c)$-ben. $H_{x,y}(x, y)$ tehát a

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

négyszögben definiált egyértékű és nem negatív függvény.

Épp így definiálhatók ha x és z, illetve ha y és z állandók $H_{x,z}(x, z)$, $H_{y,z}(y, z)$, egy-egy négyszögben.

A terület végességére szükséges és elégséges, hogy

$$\underline{\int_0^a}\Big(\underline{\int_0^b} H_{x,y}(x, y)\,dy\Big)\,dx + \underline{\int_0^a}\Big(\underline{\int_0^c} H_{x,z}(x, z)\,dz\Big)\,dx +$$

$$+ \underline{\int_0^b}\Big(\underline{\int_0^c} H_{y,z}(y, z)\,dz\Big)\,dy$$

véges legyen.

Megjegyzem, hogy ezen H függvényekre például

$$\underline{\int_0^a}\Big(\underline{\int_0^b} H_{x,y}(x, y)\,dy\Big)\,dx = \underline{\int_0^b}\Big(\underline{\int_0^a} H_{x,y}(x, y)\,dx\Big)\,dy$$

áll és hogy például

$$\underline{\int_0^a}\Big(\underline{\int_0^b} H_{x,y}(x, y)\,dy\Big)\,dx$$

egyenlő az $H_{x,y}(x, y)$ függvénynek a fent említett négyszögre kiterjesztett *kettős alsó integráljával.* A területnek épp úgy, mint a $z = f(x, y)$-nál még szűkebb definitiói is adhatók ezek végességére is szükséges és némi megszorítással elégséges is a feltétel.

Geőcze Zoárd.

VALÓS EGYÜTTHATÓS EGYENLETEK VALÓS GYÖKEIRŐL.

(Első közlemény.)

1. §. Bevezetés.

Legyenek az

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

n-edfokú algebrai egyenlet együtthatói reális számok. A szerint, hogy két konzekutiv, el nem tünö együttható egyenlő vagy különböző előjelű, azt mondjuk, hogy az együtthatók sorozatában e két tag közt jelkövetkezés vagy jelváltás van. DESCARTES a következő összefüggést találta az egyenlet pozitiv gyökeinek és a jelváltásoknak számossága közt:

I. Descartes jelszabály. Az $f(x) = 0$ egyenlet pozitiv gyökeinek száma nem haladhatja meg a jelváltásoknak számát az egyenlet el nem tűnő együtthatóinak sorozatában és a különbség a két számosság közt mindig páros. A gyökök megszámlálásánál minden gyök annyiszor számitandó, a hányszoros gyöke az egyenletnek. Ha $f(0) = a_0 = 0$, akkor az $x = 0$ gyök nem számitandó a pozitiv gyökök közé.

A DESCARTES jelszabály az első azon tételek sorozatában, a melyek fölső határt adnak egy reális együtthatójú egyenlet reális gyökeinek számosságára egy megadott (a, b) intervallumban. (Az $x = a$ hely nem számitandó hozzá, az $x = b$ hely hozzászámitandó az intervallumhoz.) A DESCARTES jelszabályt számos más tétel követte, melyek azt egyrészt általánositották, másrészt a reális gyökök számosságának általa megadott fölső határát pontosabbal helyettesitették. Ezen tételek közül idézem azokat, a melyek a következő vizsgálatokkal szorosan összefüggnek.

II. Budan—Fourier tétel. Jelentse $v(x)$ a jelváltások számát az

$$f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$$

sorozatban, a melyben mindegyik tag az előtte állónak deriváltja. Ha p jelenti az $f(x) = 0$ egyenlet azon reális gyökeinek számát, a melyek a-nál nagyobbak és b-nél nem nagyobbak, akkor

$$p = v(a) - v(b) - 2\nu,$$

a hol ν nem negativ egész számot jelent. A gyökök multiplicitásukkal számítandók.

A Budan—Fourier tétel a Descartes jelszabályt magában foglalja, a mint az kiderül, ha a-nak zérust, b-nek egy elegendő nagy pozitiv számot választunk.

A Descartes jelszabályt Laguerre transzcendens egyenletekre is kiterjesztette.

III. Laguerre tétele.[1] Ha az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor, a melynek együtthatói reálisok, az R sugarú körben konvergens, akkor az $f(x) = 0$ egyenlet pozitiv, R-nél kisebb gyökeinek[2] száma nem haladja meg az együtthatók sorozatában föllépő jelváltások számát. Ha a jelváltások száma véges és $f(x)$ az $x = R$ helyen divergens, akkor a két számosság közti különbség páros. A gyökök multiplicitásukkal számítandók.

Mint az algebrai egyenleteknél, a transzcendenseknél sem adják meg az együtthatók sorozatában föllépő jelváltások a pozitiv gyökök pontos számát, hanem annak csak egy felső határát. De már Laguerre kimutatta a következő tételt:

IV. Laguerre tétele.[3] Legyen az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor

---

1 Laguerre: Sur la théorie des équations numeriques. Oeuvres. I. kötet 3—47. oldal.

2 Az $f(x) = 0$ egyenlet gyökei a változó azon értékei, a melyek $f(x)$ hatványsorát konvergenssé és annak összegét 0-sá teszik.

3 Laguerre: l. c.

ugyanazon föltételeknek alávetve, mint a III. tételben és alkossuk meg az

$$(1-x)^{-k} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)} x^n \quad (k=1, 2, \ldots) \qquad (A)$$

hatványsorokat; jelentse $v(k)$ az együtthatók sorozatában fellépő jelváltások számát és legyen (A) konvergenciasugara r;[1] akkor

1. $v(k)$ csak fogyhat, ha k nő;

2. $v(k)$ nem lehet kisebb, mint az $f(x) = 0$ egyenlet pozitiv (és természetesen r-nél kisebb) gyökeinek száma. A gyökök multiplicitásukkal számítandók. LAGUERRE fölvetette a kérdést, hogy k elég nagy értékei mellett $v(k)$ nem adja-e meg az egyenlet gyökeinek pontos számát. A feleletet a következő tétel tartalmazza:

V. Fekete és Pólya tétele.[2] Ha k-nak valamely k_0 értékénél az (A) hatványsor az r sugarú körben konvergens és az $x=r$ helyen szorosabb értelemben divergens, akkor $\lim_{k=\infty} v(k)$ megegyezik az $f(x) = 0$ egyenlet r-nél kisebb pozitiv gyökeinek számával (a gyököket multiplicitásukkal számítva). Ha $\nu_i^{(k)}$ jelenti az (A) hatványsor azon együtthatójának indexét, a mely után az i-edik jelváltás föllép, akkor a

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_i^{(k)}}{k+\nu_i^{(k)}} \text{ [3]}$$

határérték mindig létezik és ha kisebb r-nél, az $f(x)=0$ egyenlet gyöke; ezen határértékek az egyenlet minden, a $(0, r)$ inter-

---

[1] $r=1$, ha $R \geq 1$ és $x = 1$ az $f(x) = 0$ egyenletnek k-nál nem magasabbrendű gyöke; minden más esetben $r = R$.

[2] M. FEKETE und G. PÓLYA: Über ein Problem von LAGUERRE. Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo. XXXIV. kötet; és Mathematikai és Természettud. Értesitő XXX. kötet.

[3] $\frac{\nu_i^{(k)}}{k+\nu_i^{(k)}}$ nem más, mint az $(1-x)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k,n} x^n$ hatványsor

$$c_{k,\,\nu_i^{(k)}-1} \quad \text{és} \quad c_{k,\,\nu_i^{(k)}}$$

együtthatóinak hányadosa.

vallumba eső gyökét rendre megadják, még pedig mindegyiket annyiszor, a hányszoros gyöke az egyenletnek.

Azt a szolgálatot, a melyet a (0, 1) intervallumban az $(1-x)^{-k}$ hatványsora tesz meg, ugyanabban vagy más intervallumban más hatványsorok is megtehetik. Már LAGUERRE[1] megmutatta, algebrai egyenletek esetében, FEKETE[2] pedig transzcendensekre is, hogy e^{kx} hatványsora k elég nagy pozitiv értékei mellett épúgy megadja az *összes* pozitiv gyökők számát és helyét, mint $(1-x)^{-k}$ a (0, 1) intervallumba esőkét. Szerző[3] pedig teljesen analóg tételt állított fel az $(1+x)^k$ polinómról, mely k elég nagy pozitiv értékei mellett szintén alkalmas úgy algebrai, mint transzczendens egyenletek esetében az *összes* pozitiv gyökök számának és helyének meghatározására.

Az $f(x)=0$ egyenlet együtthatósorozatában föllépő jelváltások tehát csak fölső határt adnak a pozitiv gyökök számosságára, de találhatók oly $\varphi_k(x)$ függvények, hogy a $\varphi_k(x)\cdot f(x)$ hatványsorában föllépő jelváltások száma a k parameter alkalmas értékei mellett megadja az egyenlet egy pozitiv $(0, R)$ intervallumba eső gyökeinek pontos számát és módot ad ezen gyökök meghatározására is. Ezen dolgozatban elegendő feltételeket állítok fel $\varphi_k(x)$ együtthatóira, a melyek mellett a

$$\varphi_k(x)\, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)} x^n$$

hatványsor együttható sorozatában föllépő jelváltások száma a k index elég nagy értékeinél megegyezik az $f(x)=0$ egyenlet $(0, R)$ intervallumba eső gyökeinek pontos számával; és ha

$$A_\alpha^{(k)},\ A_\beta^{(k)},\ A_\gamma^{(k)},\ldots$$

---

[1] LAGUERRE: l. c.

[2] FEKETE: Rendiconti l. c.

[3] BÁLINT: Vizsgálatok reális stb. Math. és Természettudományi Értesítő XXXI. kötet.

az együttható sorozat azon tagjai, a melyek után jelváltás lép föl, akkor a

$$\varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k,n} x^n$$

együtthatóiból alkotott

$$\frac{c_{k,\alpha}}{c_{k,\alpha+1}}, \quad \frac{c_{k,\beta}}{c_{k,\beta+1}}, \quad \frac{c_{k,\gamma}}{c_{k,\gamma+1}}, \ldots$$

hányadosok k növekedtével a $(0, R)$ intervallumba eső gyökökhöz konvergálnak. Rövidség kedvéért $\varphi_k(x)$-et az

$$A_0^{(k)}, \quad A_1^{(k)}, \quad A_2^{(k)}, \ldots$$

sorozat generatrix függvényének nevezem és a

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \ldots$$

sorozatot a probléma $(0, R)$ intervallumhoz tartozó generatrix-sorozatának.

2. §. Többszörösen pozitiv sorokról.

Ha a $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ reális együtthatójú hatványsor együtthatóiból alkotott

$$\begin{vmatrix} c_{i_0} & c_{i_1} & \ldots & c_{i_p} \\ c_{i_0-1} & c_{i_1-1} & \ldots & c_{i_p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i_0-p} & c_{i_1-p} & \ldots & c_{i_p-p} \end{vmatrix} = [i_0, i_1, \ldots i_p]$$

$$(c_s = 0, \quad \text{ha} \quad s < 0)$$

$\overline{p+1}$-edrendű determinánsok az indexek minden

$$0 \leqq i_0 < i_1 < \cdots < i_p \quad \text{és} \quad 0 \leqq p \leqq P$$

rendszerénél pozitivok, akkor a $\varphi(x)$ hatványsort Fekete Mihály jelölésével[1] «P-szeresen pozitiv»-nak mondom.

[1] Fekete: Rendiconti l. c.

Zérusszorosan és *a fortiori* többszörösen pozitiv hatványsor minden együtthatója zérustól különböző pozitiv szám, tehát a hatványsor polinóm nem lehet. Czélszerűnek mutatkozik a

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n$$

polinómot P-szeresen pozitivnak nevezni, ha az

$$[i_0, i_1, \ldots, i_p] \quad (c_s=0, \text{ ha } s<0)$$
$$0 \leqq i_0 < i_1 < \cdots < i_p, \quad 0 \leqq p \leqq P$$

determinánsok mind pozitivok, kivéve azokat, melyeknek kifejtésében minden tag külön zérus. P-szeresen pozitiv hatványsor a $(0, 1)$ intervallumhoz tartozó $(1-x)^{-k}$ generatrixfüggvénynek MAC-LAURIN sora k-nak P-nél nagyobb értékei mellett és a $(0, \infty)$ intervallumhoz tartozó e^{kx} generatrix függvénynek MAC-LAURIN sora minden pozitiv k mellett. A $(0, \infty)$ intervallumhoz tartozó $(1+x)^k$ generatrix függvény viszont k minden pozitiv egész értékénél P-szeresen pozitiv polinóm.

FEKETE MIHÁLY kimutatta,[1] hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hatványsor $[n, n+1, \ldots, n+p]$ determinánsainak minden $n \geqq 0$, $p \leqq P$ indexre fennálló pozitivitásából már következik, hogy a hatványsor P-szeresen pozitiv. Minthogy polinómok is lehetnek generatrixsorozatok tagjai, szükségem lesz a következő lemmára: Ha a

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n$$

N-edfokú polinóm $\overline{N+1}$ együtthatója zérustól különböző pozitiv szám és

$$[n, n+1, \ldots, n+p] > 0 \quad (c_s=0, \text{ ha } s<0 \text{ vagy } >N)$$
$$0 \leqq n \leqq N, \ p \leqq P,$$

akkor a polinóm P-szeresen pozitiv.

---

[1] FEKETE: Rendiconti l. c.

Nyilvánvaló, hogy $[n, n+1, \ldots, n+p]=0$, ha $n>N$, mert akkor a determináns kifejtésében minden tag zérus. Az

$$\begin{aligned}&[i_0, \ldots, i_{\nu-1}, i_{\nu+1}, \ldots, i_{p+1}]\,[i_1, \ldots, i_p]=\\ &=[i_0, \ldots, i_{\nu-1}, i_{\nu+1}, \ldots, i_p]\,[i_1, \ldots, i_{p+1}]+\\ &+[i_1, \ldots, i_{\nu-1}, i_{\nu+1}, \ldots, i_{p+1}]\,[i_0, \ldots, i_p]\end{aligned}$$

determinánsreláczió ismételt alkalmazásával pedig nyerjük, hogy

1. $[n-\nu, n+1, \ldots, n+p]>0$, ha $\nu\leqq n\leqq N$, $p\leqq P$; míg $n>N$ maga után vonja a determináns eltünését, mert akkor kifejtésének minden tagja zérus;

2. $[n-1, \ldots, n-\nu-1, n-\nu+1, \ldots, n+p]>0$, ha $n\leqq N$, $p\leqq P$; ha pedig $n>N$, akkor a determináns kifejtésének minden tagja, tehát a determináns maga is zérus;

3 $[i_0, i_1, \ldots, i_p]>0$, ha $i_0<i_1<\cdots<i_p\leqq N+p$ és $p\leqq P$; ha pedig $i_p>N+p$, akkor a determináns, kifejtésének minden tagjával együtt eltűnik, qu. e. d.

3. §. A generatrixsorozatok.

Jelentsen R egy pozitiv, abszolut konstanst ($+\infty$-t is megengedve) és

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots \qquad (\varphi)$$

$$\varphi_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{k,n} x^n$$

reális együtthatóju polinómoknak vagy hatványsoroknak egy sorozatát, a melyeknek együtthatói a következő 5 feltételnek tesznek eleget:

1. ha valamelyik hatványsor egyik együtthatója zérus, akkor minden következő együtthatója is zérus;

2. minden pozitiv egész P-hez megadható K úgy, hogy minden $p\leqq P$ indexre nézve

$$[n, n+1, \ldots, n+p]_k>0, \quad \text{ha} \quad c_{k,n}\neq 0,$$

ha $k\geqq K$; a determináns mellett alkalmazott k index azt jelenti, hogy a determináns elemei a $\varphi_k(x)$ együtthatóiból valók; ha $c_{k,n}=0$, akkor az első feltételből következik már a determináns eltünése, mert kifejtésének minden tagja zérus; az előbbi § alapján mondhatjuk tehát, hogy $\varphi_k(x)$, akár polinóm, akár hatványsor, minden $k\geqq K$ indexre nézve P-szeresen pozitiv;[1]

3. a tetszőleges pozitiv ε-hoz és R-nél kisebb pozitiv G-hez megadható K úgy, hogy minden $k\geqq K$ indexre nézve az $(a, a+\varepsilon)$ zárt intervallumhoz tartozik a

$$\frac{c_{k,0}}{c_{k,1}}, \frac{c_{k,1}}{c_{k,2}}, \frac{c_{k,2}}{c_{k,3}}, \ldots \tag{c}$$

sorozatnak legalább egy tagja, ha $0\leqq a$, $a+\varepsilon\leqq G$;

4. minden pozitiv egész P-hez és R-nél kisebb pozitiv G-hez megadható K úgy, hogy minden $\nu\leqq n$ és $p\leqq P$ indexre nézve

$$\frac{[n-\nu, n+1, \ldots, n+p]_k}{[n, n+1, \ldots, n+p]_k} \leqq A \binom{p+\nu}{p} \frac{c_{k,n-\nu}}{c_{k,n}},$$

ha $k\geqq K$, $c_{k,n}\neq 0$ és $\dfrac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}}\leqq G$; az A csak P-től és G-től függő pozitiv számot jelent;

5. A tetszőleges pozitiv ε-hoz, R-nél kisebb pozitiv G-hez, pozitiv egész P-hez és L-hez megadható K úgy, hogy minden $\nu\leqq n\leqq L$, $p\leqq P$ indexre nézve

---

[1] Külön ki kell emelni ezen feltételek jelentését, ha $P=0$ és $P=1$; a zérusszoros pozitivitásból következik, hogy minden el nem tünő együttható

$$c_{k,\nu}=[\nu]_k>0;$$

az egyszeres pozitivitásból még ezenfelül

$$[\nu, \nu+1]_k = c_{k,\nu}^2 - c_{k,\nu-1}c_{k,\nu+1} > 0, \quad \text{ha } c_{k,\nu}\neq 0:$$

ha pedig $c_{k,\nu+1}$ sem zérus, akkor a pozitiv $c_{k,\nu}c_{k,\nu+1}$ faktorral osztva

$$\frac{c_{k,\nu}}{c_{k,\nu+1}} > \frac{c_{k,\nu-1}}{c_{k,\nu}};$$

vagyis a $\dfrac{c_{k,\nu-1}}{c_{k,\nu}}$ hányadosok monoton növekvő sorozatot alkotnak.

$$(1-\varepsilon)\binom{p+\nu}{p}\frac{c_{k,\,n-\nu}}{c_{k,\,n}} \leqq \frac{[n-\nu,\, n+1, \ldots, n+p]_k}{[n,\, n+1, \ldots, n+p]_k} \leqq$$

$$\leqq (1+\varepsilon)\binom{p+\nu}{p}\frac{c_{k,\,n-\nu}}{c_{k,\,n}},$$

ha $k \geqq K$, $c_{k,\,n} \neq 0$ és $\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}} \leqq G$.

A felsorolt feltételek közül a másodikból következett, hogy egy elég nagy indextől kezdve a $\varphi_k(x)$ együtthatóiból alkotott (c) sorozat monoton növekvő. Minthogy pedig

$$\frac{c_{k,\,n-\nu}}{c_{k,\,n}} = \frac{c_{k,\,n-\nu}}{c_{k,\,n-\nu+1}}\,\frac{c_{k,\,n-\nu+1}}{c_{n,\,n-\nu+2}} \cdots \frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}},$$

fennállanak a következő egyenlőtlenségek:

$$0 < \left(\frac{c_{k,\,n-\nu}}{c_{k,\,n-\nu+1}}\right)^{\nu} < \frac{c_{k,\,n-\nu}}{c_{k,\,n}} < \left(\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}}\right)^{\nu},$$

tehát

$$0 < \left(\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}}\right)^{\nu} - \frac{c_{k,\,n-\nu}}{c_{k,\,n}} < \left(\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}}\right)^{\nu}.$$

A (c) sorozatról még többet is mondhatunk. A tetszőleges pozitiv ε-hoz és R-nél kisebb pozitiv G-hez meghatározható K úgy, hogy minden $k \geqq K$ indexre nézve

$$\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}} - \frac{c_{k,\,n-2}}{c_{k.\,n-1}} \leqq \varepsilon, \quad \text{ha} \quad c_{k,\,n} \neq 0 \quad \text{és} \quad \frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}} \leqq G.$$

A 3. feltétel szerint ugyanis megválasztható K úgy, hogy minden $k \geqq K$ indexre nézve a $\left(\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}} - \varepsilon, \frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}} - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ zárt intervallumba essék a (c) sorozatnak legalább egy tagja, ha $\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}} \leqq G$; ezen tagnak a monoton növekvő (c) sorozatban $\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}}$-et meg kell előznie, a miből a felírt egyenlőtlenség következik.

Ezen egyenlőtlenség mutatja, hogy a pozítiv egész L-hez és R-nél kisebb pozitiv τ-hoz megadható K úgy, hogy minden

$k \geqq K$ indexre nézve $\frac{c_{k,L-1}}{c_{k,L}} \leqq \tau$. Mert a 3. feltétel szerint egy elég nagy k indextől kezdve a

$$\left(0, \frac{\tau}{2L+1}\right), \left(\frac{2\tau}{2L+1}, \frac{3\tau}{2L+1}\right), \ldots, \left(\frac{2L\tau}{2L+1}, \tau\right)$$

intervallumok mindegyikébe tartozik a (c) sorozatnak legalább egy tagja, tehát az L-edik tag még nem haladhatja meg τ-t.

Szükségem lesz végül még a következő megjegyzésre. A tetszőleges pozitiv ε-hoz, R-nél kisebb pozitiv G-hez és pozitiv egész L-hez megadható K úgy, hogy

$$\frac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}} - \frac{c_{k,n-L-1}}{c_{k,n-L}} \leqq \varepsilon,$$

ha $k \geqq K$, $c_{k,n} \neq 0$, $\frac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}} \leqq G$, $n \geqq L$.

Ugyanis K megválasztható úgy, hogy $k \geqq K$-ra nézve egyrészt

$$\frac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}} - \frac{c_{k,n-2}}{c_{k,n-1}} \leqq \frac{\varepsilon}{A(L+1)}$$

legyen, másrészt a 4. feltétel szerint

$$\frac{[n-L, n]_k}{[n-1, n]_k} \leqq A(L+1) \frac{c_{k,n-L}}{c_{k,n}}$$

egyenlőtlenség is teljesüljön. Részletesen kiírva

$$\frac{c_{k,n-L}\,c_{k,n-1} - c_{k,n-L-1}\,c_{k,n}}{c_{k,n-1}^2 - c_{k,n-2}\,c_{k,n}} \leqq A(L+1) \frac{c_{k,n-L}}{c_{k,n}}$$

és a pozitiv $\frac{c_{k,n-L}}{c_{k,n}}$-nel osztva

$$\frac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}} - \frac{c_{k,n-L-1}}{c_{k,n-L}} \leqq A(L+1)\left(\frac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}} - \frac{c_{k,n-2}}{c_{k,n-1}}\right) \leqq$$

$$\leqq A(L+1) \frac{\varepsilon}{A(L+1)} = \varepsilon,$$

qu. e. d.

A levezetett egyenlőtlenségből következik, hogy ha k elég nagy és $\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}} \leqq G$, akkor

$$\frac{c_{k.\,n-1}}{c_{k,\,n}} - \frac{c_{k,\,n-\nu-1}}{c_{k,\,n-\nu}} \leqq \varepsilon,$$

míg

$$\nu \leqq L;$$

tehát

$$\left(\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}}\right)^{\nu} - \frac{c_{k,\,n-\nu}}{c_{k,\,n}} < \left(\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}}\right)^{\nu} - \left(\frac{c_{k,\,n-\nu}}{c_{k,\,n-\nu+1}}\right)^{\nu} =$$

$$= \left(\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}} - \frac{c_{k,\,n-\nu}}{c_{k,\,n-\nu+1}}\right)\left[\left(\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}}\right)^{\nu-1} + \left(\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}}\right)^{\nu-2}\frac{c_{k,\,n-\nu}}{c_{k,\,n-\nu+1}} + \cdots +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{c_{k,\,n-\nu}}{c_{k,\,n-\nu+1}}\right)^{\nu-1}\right] < \varepsilon\nu\left(\frac{c_{k,\,n-1}}{c_{k,\,n}}\right)^{\nu-1}.$$

Bálint Elemér.

A Mathematikai és Physikai Társulat XXIII. rendes közgyűlése.

A Mathematikai és Physikai Társulat XXIII. rendes közgyűlését 1916 május hó 11-én tartotta meg a következő napirenddel:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1916-ra.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. Választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

Jelen voltak: Anderkó Aurél, Bálint Elemér, Bauer Mihály, Beke Manó, Brody Imre, Csengery Piroska, Dávid Lajos, Egerváry Jenő, br. Eötvös Loránd, Fejér Lipót, Fraunhoffer Lajos, Fröhlich Izidor, Haich Sarolta, br. Harkányi Béla, Jordan Károly, Kálovics Rezső, Kilczer Gyula, Kopp Lajos, Kőnig Dénes, Kövesligethy Radó, Kronberger Ede, Kürschák József, Lukács Ferencz, Mattyasovszky Kasszián, Mikola Sándor, Nagy Sarolta, Privorszky Alajos, Rados Gusztáv, Rados Ignácz, Rátz László, Rejtő Sándor, Réthy Mór, Rucsinszki Lajos, Rybár István, Sárközy Pál, Sasvári Géza, Schuller Alajos, Sidon Simon, Somogyi Antal, Sós Ernő, Széky István, Szőke Béla, Szűcs Adolf, Tőtössy Béla, Wodetzky József.

I. Elnöki megnyitó.

Báró Eötvös Loránd elnök megnyitja a közgyülést. Jelenti, hogy Társulatunk egyik alelnöke *Károly Irén*, prem. kanonok, nagyváradi áll. jogakadémiai r. tanár, a physika magántanára a kolozsvári egyetemen, Társulatunknak 2000 koronát ajánl fel (hadikötvényben) oly alapítvány létesítésére, melynek kamatai, szavai szerint, «a physikai ismeretek mélyítésére fordíttassanak oly czéllal, oly szellemben és oly körülmények között, mint az a mathematikai tanulóversenyeknél szokás. Legyen Mathematikai és Physikai Társulatunk kebelében necsak mathematikai, hanem physikai tanulóverseny is; az energia-leadás e nagy napjaiban az energia-gyűjtés megkönnyítéséről is gondoskodnunk kell.»

Elnök ehhez hozzáteszi: «Én tisztelt társamnak örömemet fejeztem ki válaszképen. Az alapítvány el is jutott hozzám, és a Választmány foglalkozott is ezzel a kérdéssel, és elhatározta, hogy úgy mint eddig minden évben mathematikai versenyt tartott a Társulat, úgy ezentúl physikai versenyt is fog tartani: 100 korona és 50 korona «*Károly Irén-díj*»-jal. A verseny részleteit illetőleg az Elnökség fog intézkedni. Az alapítvány folytán lehetséges lesz már ebben az évben a physikai versenyt megtartani. Ezt az örvendetes tényt akartam a különben nehéz időben a Közgyűlés tudomására hozni. Indítványozom, hogy a Közgyűlés fejezze ki köszönetét *Károly Irén*-nek.

Most pedig üdvözlöm az egybegyülteket és a távollevőket, különösen azokat a társakat, a kik a harcztéren teljesítik nehéz kötelességeiket. A harcztéren elesettek emlékét pedig kegyelettel fogjuk megőrizni. Ezzel a mai Közgyűlést megnyitom.»

Elnök a jegyzőkönyv vezetésére *Kopp Lajos*t, hitelesítésére *Széky István*t és *Mattyasovszky Kasszián*t kérte fel.

II. Titkári jelentés Fejér Lipóttól.

Tisztelt Közgyűlés!

Van szerencsém a következőkben, mint helyettes *ügyvivő*-titkár, a «Mathematikai és Physikai Társulat» 1915. évi életéről az idetartozó adatok felsorolásával jelentést tenni.

A «Mathematikai és Physikai Lapok» huszonnegyedik évfolyama megjelent 16 ívnyi terjedelemben. E kötet 12 önálló és ismertető czikket tartalmaz, melyek közül 6 mathematikai, és 6 physikai tárgyú. Kiemelem még a «Physikai Szemle» és a «Physikai Laboratorium» czímű rovatokat.

Zemplén Győző titkár és szerkesztőtársam állandóan a harcztéren van. Azt hiszem egész Társulatunk féltő, szeretetteljes érdeklődése van ráirányítva. Folyóiratunk physikai részét, a Választmány megbízásából, *Mikola Sándor* szerkesztette, a ki avatottsággal és buzgalommal végzett munkájával Társulatunkat igaz hálára kötelezte.

Társulatunk az 1915. évben 10 előadó-ülést tartott, melyeken 14 előadást hallottunk. Ezek között volt 6 mathematikai és 8 physikai tárgyú.

A XXII. mathematikai tanulóversenyen 51 versenyző vett részt. Az első «br. Eötvös Loránd-díj»-at *Boskovitz Alfréd*, a másodikat *Krbek Ferencz* nyerte el.

A Math. és Phys. Társulatnak 441 tagja van. Ezek közül 216 budapesti, 225 vidéki.

Az előfizetők száma 114.

Örömmel jelentem, hogy az alapító tagok száma 17-ről 19-re növekedett. Új alapító tagok: a «*Magyar Kir. József-Müegyetem Könyvtára*» és *dr. Jordan Károly. Fényes Dezső,* régi alapító tagunk, 200 koronás tagdíját 1000 koronára emelte. Társulatunk ezért neki köszönettel adózik.

A Magyar Tudományos Akadémia, illetőleg annak «Mathematikai és Természettudományi Bizottsága» ezidén is támogatta 2000 koronával Társulatunkat. E hathatós anyagi támogatásért hálás köszönetünket fejezzük ki.

Szomorúan kell jelentenem a tisztelt Közgyűlésnek, hogy ezidén is sok érdemes tagtársunk távozott el örökre körünkből. Elvesztettük *Klimkó Mihály, Konkoly-Thege Miklós, Kunszt János, Muraközy Károly, Nagy Dezső, Scholtz Ágoston, Strompf László* és *Zilahy László* tagtátsainkat és nehéz szívvel kell hozzátennem, hogy *Horváth Kálmán, Lébér Gyula, Raj László* és *Schuller Lajos* tagtársaink a harcztéren haltak hősi halált. Őrízzük meg kegyeletesen kedves tagtársaink emlékét!

1916 márczius 16-án ünnepelték 70. születése napján Stockholmban a nagy svéd mathematikust, *Gösta Mittag-Lefflert*, a ki a magyar mathematika ügyéért mindig kitüntető melegséggel érdeklődött, és hathatósan tevékenykedett is. Örömmel ragadta meg a Math. és Phys. Társulat az alkalmat, hogy a kiváló ember iránti tiszteletének és hálájának üdvözlő iratban is adjon kifejezést. *Mittag-Leffler* szívélyesen köszönte meg üdvözlő sorainkat, és egyúttal elküldötte nekünk nyomtatásban a *Mittag-Leffler* házaspár végrendeletét. Ebből kitűnik, hogy mathematikai gyüjteményüket, djursholmi villájukat és egész vagyonukat egy nemzetközi alapítványra szánják, melynek kizárólagos czélja a tiszta mathematika, és annak tehetséges és hű művelői érdekének előmozdítása. Ha megnyerjük a *Mittag-Leffler* házaspár szíves hozzájárulását, akkor e végrendeletet egész terjedelmében fogjuk közölni a Math. és Physikai Lapokban. Tesszük ezt egyrészt azért, hogy a Társulat tisztelt tagjai már most megismerkedjenek a nagy mathematikai intézet tervezetével, másrészt azért, hogy gyönyörködhessenek abban a nemes, rendíthetlen tudósideálizmusban, mely e nagyszerű testamentum minden sorát áthatja.

Titkári működésemben a Társulat sok tagja úgy a tudományos, mint az adminisztrativ részben nagy segítséget nyujtott. Fogadják ezért itt, a tisztelt Közgyűlés előtt, hálás köszönetem kifejezését.

Kérem a tisztelt Közgyűlést, szíveskedjék jelentésemet tudomásul venni.

Budapest, 1916 május 11-én.

Fejér Lipót,
a Math. és Phys. Társulat titkára.

1915. (

BEVÉTELEK	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
1914. évi zárószámadási maradvány	1078	28	1078	28
Folyó és köv. évi tagdijak	2600	—	961	—
Hátralékos tagdijak	2000	—	630	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	200	—	100	—
Előfizetési dijak	1000	—	1046	—
Nyomtatványokból	200	—	170	—
Kamatok	600	—	614	40
			6599	68

Vagyo

VAGYON	1914. év végén Kor.	fill.	1915. év végén Kor.	fill.
Alaptőke:				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján:				
a) Készpénz	1940	—	1940	—
b) 2600 K névért. főv. kölcsönkötv.	2600	—	2600	—
c) 100 « « koronajáradék-kötv.	100	—	100	—
Első hazai takarékpénztári betét	108	—	108	—
Majthényi Ottó-féle hagyaték	10000	—	10000	—
Forgó tőke:				
Készpénz	263	87	474	87
Leszám. és pénzv. bankban takp. betét	48	80	48	80
M. kir. postatakarékpénztárban	194	61	114	95
Első hazai takarékpénztári betét	200	—	200	—
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján	371	—	565	—
Tagdijhátralékok	4600	—	4800	—
Föl nem vett hirdetési dijak	100	—	100	—
Nyomtatványokban	700	—	700	—
	21226	28	21751	33

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtu

Balog Mór s. k. *Bogyó Samu s. k.*

a közgyűlés részéről.

1916. évi költsé

BEVÉTELEK	1915. évi előirányzat Kor.	fill.	1916. évi előirányzat Kor.	fill.
Zárószámadási maradvány	1078	28	1403	33
Folyó és köv. évi tagdijak	2600	—	2000	—
Hátralékos tagdijak	2000	—	1800	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	200	—	200	—
Előfizetési dijak	1000	—	1000	—
Nyomtatványokból	200	—	100	—
Kamatok	600	—	600	—
Hiány	1522	51	735	39
	11200	79	9838	72

rószámadások.

KIADÁSOK	Előirányzat Kor.	fill	Eredmény Kor.	fill·
Nyomdai költség	7674	28	2400	—
Irói tiszteletdijak	2566	51	1961	28
Expeditió- és irodai költségek	800	—	685	07
Középiskolai tanulóverseny	160	—	150	—
Pénztári maradvány *a)* készpénzben	—	—	474	58
b) takarékp. betétben	—	—	928	75
—			6599	68

érleg.

TEHER	1914. év végén Kor.	fill.	1915. év végén Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	5674	28	6049	87
Irói tiszteletdijak	566	51	284	75
A folyórat XXIII. (ill. XXIV.) évf. utolsó füzetének nyomdaköltsége	861	31	644	10
Tiszta vagyon mint egyenleg	14124	18	14772	61
	21226	28	21751	33

Kelt Budapesten, 1916. május 5-én.

Fejér Lipót s. k. titkár.

Beke Manó s. k. *Rátz László s. k.* a választmány részéről.

lőirányzat.

KIADÁSOK	1915. évi előirányzat Kor.	fill.	1916. évi előirányzat Kor.	fill.
Nyomdai költség	7674	28	6693	97
Irói tiszteletdijak	2566	51	2284	75
Expeditió- és irodai költségek	800	—	700	—
Középisk. tanulóverseny	160	—	160	—
	11200	79	9838	72

Privorszky Alajos
pénztárnok.

III. Pénztárnok jelentése, költségelőirányzat 1916-ra és a pénztárvizsgáló bizottság jelentése.

Pénztárnok előterjeszti a fenti számadást és vagyonmérleget 1915-ről; az elnök pedig bemutatja a pénztárvizsgáló bizottság jelentését, mely szerint a pénzkezelés kifogástalan volt.

A közgyűlés ennek alapján megadja a pénztárnoknak a felmentvényt és a pénztárvizsgálóknak fáradozásukért köszönetet mond, felkérvén Balog Mór és Bogyó Samu rendes tagokat, hogy a pénztárvizsgálói tisztet a következő évre is vállalják el.

Pénztárnok előterjeszti a költségelőirányzatot, az 1916. évre, melyet a közgyűlés elfogad.

IV. Választmányi tagok választása.

A közgyűlés *Fröhlich Izidor, Klupathy Jenő, Rátz László* és *Tőtössy Béla* választmányi tagokat újra megválasztja. A választást Kőnig Dénes, Rybár István és Wodetzky József vezették.

E szerint:

Tisztikar: Elnök: br. Eötvös Loránd, alelnökök: Károly Irén és Rados Gusztáv, titkárok: Fejér Lipót és Zemplén Győző, jegyzők: Kopp Lajos és Kürschák József, pénztárnok: Privorszky Alajos.

Választmányi tagok: Bartoniek Géza, Beke Manó, Fröhlich Izidor, Gruber Nándor, br. Harkányi Béla, Klupathy Jenő, Kövesligethy Radó, Mikola Sándor, Rátz László, Réthy Mór, Szily Kálmán, Tőtössy Béla.

A MITTAG-LEFFLER HÁZASPÁR MATHEMATIKAI ALAPÍTVÁNYA.[1]

Kivonat G. MITTAG-LEFFLER és SIGNE MITTAG-LEFFLER (szül. af LINDFORS) végrendeletéből.

(1916 márczius 16.)

Ezennel kinyilatkoztatjuk, hogy, megváltoztatva 1883 jan. 6. kelt közös végrendeletünket, utolsó akaratunk az, hogy mindkettőnk halála után minden hátrahagyott tulajdonunk egy alapítványnak jusson, mely «A MITTAG-LEFFLER HÁZASPÁR MATHEMATIKAI ALAPÍTVÁNYA» nevet viselje.

Ezen alapítvány feladata, hogy a négy északi országban (Svédországban, Dániában, Finnországban és Norvégiában) és pedig első sorban Svédországban a jövőre fenntartsa és tovább építse azt a pozicziót, melyet a *tiszta* mathematika ezen országokban jelenleg elfoglal és ezáltal Észak-Európa határain kívül is tiszteletet és kellő megbecsülést szerezzen azon adalékok számára, melyekkel ezek az országok járulnak a legmagasabb szellemi élethez.

Hangsúlyozzuk, hogy e feladat megoldásánál az említetteken kívül semmiféle más szempont ne érvényesülhessen. Innen következik, hogy senkinek sem szabad tekintettel lenni személyes barátságokra vagy olyanok kivánságára, kik valakinek szűkös helyzetében anyagi támogatást akarnának nyújtani. Nem szabad tekintettel lenni praktikus szükségletekre, vizsgai viszonyokra, politikai véleményre, vagy oly kivánságokra, melyek más tudományágnak, mint a *tiszta* mathematikának érdekében lépnek fel.

Az alapítvány feladatának teljesítésére a következő eszközök szolgálnak :

1. Az én (G. MITTAG-LEFFLER) mathematikai könyvtáram lelkiismeretes ápolása, fenntartása és fejlesztése, beleértve a könyvtárhoz tartozó kéziratok, levelek, arczképek, családi gyűjtemények, családi emlékek stb. gyűjteményét.

[1] Legyen szabad itt a megelőző titkári jelentésre utalnunk. A végrendeletet MITTAG-LEFFLER professor szíves hozzájárulásával közöljük. Megjegyezzük, hogy az 1., 3., 4. és *B*) alatti rendelkezések nemzetközi érdekűek. A magyar fordítást KŐNIG DÉNES műegyetemi magántanárnak köszönhetjük. *Szerk.*

A könyvtár továbbra is abban a nagy kővillában maradjon, mely Djursholm[1]-beli telkünkön (Quartier 16, Midgaard) épült és semmiféle más könyvtárba sem kebelezhető be. A ház könyvtárhelyiségnek épült és így több dolgozószobát tartalmaz, melyek arra szolgálnak, hogy a kutatók zavartalan nyugalomban használhassák a könyvtár gyűjteményeit. A villának az a kisebbik része, mely jelenleg lakásul szolgál, halálunk után szintén a könyvtár czéljaira fordítandó.

A könyvtárnak minden mathematikus számára hozzáférhetőnek kell lenni, de — visszaélések megakadályozása czéljából — csupán az igazgatóság képviselőjének vagy az alapítvány elnökének engedélye alapján. A könyvek nem kölcsönözhetők ki ; csupán a könyvtár helyiségein belül használhatók.

2. Bel- vagy külföldi tanulmányokra szóló ösztöndíjak a fentemlített négy ország olyan fiatal férfiai és női számára, kik a *tiszta* mathematikán belül kutatásra és felfedezésre igazi tehetséget mutatnak.

Továbbá : e négy ország szerzőinek olyan munkái, melyeknek a rendesnél nagyobb jelentőséget tulajdonítanak, aranyéremmel tüntetendők ki. Ez az aranyérem akkora és olyan aranytartalmú legyen, mint a kisebbik Nobel-emlékérem. Az aranyéremhez járul, a míg ennek lehetősége fennáll, az Acta Mathematica-nak egy lehetőleg teljes sorozata, méltó kötetekben, melyek a kitűntetett nevét viseljék.

3. Díjak odaitélése a *tiszta* mathematika területén tett igazi felfedezések jutalmazására. E díj kiosztásánál nem szabad a felfedező nemzetiségére tekintettel lenni ; bármely országba való lehet és az északi országok polgárai itt nem részesülhetnek előnyben. A díj csak akkor itélendő oda, ha oly felfedezésről van szó, a melyben foglalt új gondolatok olyan horderejűek, hogy valószinűnek látszik, hogy a tudomány e felfedezésből kiindulólag új fejlődésnek indul. Kivánatos azonban, hogy a díjkiosztás 6 évenkint legalább egyszer megtörténjék. A díj álljon egy művésziesen kidolgozott nagyobb aranyéremből, mely a díjazott nevét viselje, továbbá egy ugyancsak művészi kiállítású iratból, melynek feladata a díj odaitélését tudományosan indokolni. Ezekhez járul az Acta Mathematica-nak egy lehetőleg teljes sorozata, szép, tartós kötetekben, melyek a díjazott nevét viseljék. A díjazott meghivatik Djursholmba, hogy a díjat személyesen vegye át. Az esetről-esetre megállapított utiköltség a díjazottnak megtérítendő. A díj a könyvtárteremben rendezett ünnepség keretében nyújtandó át.

4. Az esetben, ha az alapítvány évi jövedelme a lent megnevezett

[1] Villatelep Stockholm közvetlen szomszédságában. (A ford. megjegyzése.)

összeget meghaladja, az elnökön kívül más fizetett alkalmazottak is alkalmazandók, kiknek kötelességük a *tiszta* mathematika területén tisztán tudományos irói és tanítói működést kifejteni.

További rendelkezések:

A) Az alapítvány igazgatósága a Stockholmi Királyi Tudományos Akadémia első (tiszta-mathematikai) osztályának svéd tagjaiból álljon, továbbá, élethossziglan, Ivar Fredholm és N. E. Nörlund tanárokból. Tagja továbbá az igazgatóságnak az alapítványnak lentebb említendő elnöke. Az igazgatóság hosszabb-rövidebb időre maga is kiegészítheti magát olyan igazán jelentékeny svéd mathematikusokkal, kik teljesen osztják azt a felfogásunkat, mely számunkra irányadó volt és a kik a Tudományos Akadémia I. osztályának még nem tagjai. Ilyen mathematikusok a többi három északi országból is bevonhatók.

B) A mint ez lehetségessé válik, az alapítvány tudományos vezetőjéül és elnökéül oly magasrangú mathematikus nevezendő ki, a ki legjobban látszik megfelelni ezen állás követelményeinek s a kinek életfeladata teljességgel a tudományos kutatás körébe vág, valamint egyébként az alapítvány feladatának megvalósításából áll. Ő legyen tanácsadója és segítője mindazon tudósoknak, kik az alapítványnál óhajtják tanulmányaikat végezni. Ezenkívül, ha ez előnyösen történhetik, kisebbszámú hallgatóságnak — csupán igazán tehetségeseknek és érdeklődőknek és mindenkor tisztára tudományos czélokból — előadásokat is tarthat.

Fizetése úgy szabályozandó, hogy gazdasági helyzete kedvezőbb legyen, mint a mathematika bármely tanítójának, ki a négy ország valamely főiskoláján működik. Az elnök Djursholmban, a könyvtárépület lehető közelében lakjék. A míg nem rendezhető be számára külön lakás, a lakbér neki megtérítendő. Reméljük, hogy Ő Felsége a király, az igazgatóság ajánlatára, kegyeskedni fog őt kinevezni.

. . . .

E) Legalább minden hatodik évben az alapítvány megüli ünnepét. A négy északi ország mathematikusai meghivatnak, hogy az ünnepen személyesen résztvegyenek. Számítunk rá, hogy, tekintettel az alapítványnak e négy országra való fontosságára, valamennyien eleget fognak tenni e meghívásnak, ha csak elháríthatatlan akadályok nem lépnek fel.

Kivánatos volna az ünnepség napját úgy megválasztani, hogy összeessék a négy északi ország stockholmi mathematikus-kongresszusának egyik napjával. Az ünnepség napján beszámoló nyújtandó az alapítványnak az utolsó ünnepség óta kifejtett tevékenységéről. Az ünnepség szép és ünnepélyes formák közt tartandó meg úgy, hogy a mathematikai tudományok magas feladata és egyidejűleg az alapítvány működésére kiszabott czél is kellően kidomborodjék.

Végül még a magam, G. Mittag-Leffler, részéről meg akarom említeni, hogy az a példakép, mely az én és feleségem alapitványa számára szemem előtt lebegett, a párisi Institut Pasteur volt. Ez az intézet véleményem szerint a jelenkor minden egyeteménél és akadémiájánál jobban oldotta meg azt a feladatot, hogy teljesen és kizárólag tudományos kutatás székhelye legyen. Az egyetemek mindenütt a tudományos tevékenység mellett más tevékenységet is kifejtenek, a mely tanárok és hivatalnokok képzéséből áll és ez utóbbi gyakran és nagy mértékben háttérbe szorítja a tisztán tudományos tevékenységet. Viszont az akadémiáknál, melyek régebben legjobban teljesítették tisztára tudományos hivatásukat, az a baj, hogy tagjaik tulajdonképeni működésüket rendszerint az akadémián kívül fejtik ki és ha ez kivételesen nincs is így, hiányzik az akadémiákon az állandóan eleven tudományos kutatásra való serkentés, a melyre pedig mindenkinek nagy mértékben szüksége van, kinek kötelessége más kutatókat vezetni és támogatni. A mi alapítványunk nem kisérleti vizsgálatok számára berendezett intézethez van kötve, hanem e helyett, a tiszta mathematika szükségleteinek megfelelőleg, egy igen gazdag szakkönyvtárhoz.

Arra, hogy alapítványunk alapjául szolgáló terv szerint természettudományi intézetek létesíttessenek, jóakarat mellett országunkban elegendő lehetőség nyílik. De a tiszta mathematika, fontossága és feladata iránt a szakembereket kivéve igen kevés a megértés és én, G. Mittag-Leffler, ezért mindenkor arra törekedtem, hogy oly alapítványt hozzak létre, a milyet e végrendeletünkkel remélhetőleg sikerült életre keltenünk.

Végrendeletünk abból az eleven meggyőződésből fakadt, hogy oly nép, mely nem becsüli nagyra a mathematikai gondolkodást, sohasem teljesítheti a legmagasabb kulturfeladatokat és nem élvezheti a többi nép között azt a tekintélyt, a mely, bizonyos idő multán, ahhoz is hatásosan hozzájárul, hogy fenntarthassa kifelé való helyzetét és azt a jogát, hogy saját életét élhesse.

. . . .

Végül utasítások következnek arra vonatkozólag, hogy — Mittag-Leffler-nére és pedig élete tartamára vonatkozó bizonyos fenntartások mellett — az alapítvány közvetlenül G. Mittag-Leffler halála után érvénybe lép, valamint utasítások a vagyon kezelésére, kisebb életjáradékokra és egyéb segélyekre vonatkozólag.

Előadásainkról.

A Mathematikai és Physikai Társulat előadó-ülésein a következő előadásokat hallottuk:

1916 január 20. Kürschák József: Függvénysorokról.

1916 február 3. Dienes Pál: A functionálszámítás alapjai.

1916 február 17. Kőnig Dénes: Az irrationális számok bevezetéséről. Rybár István: Az Ampère-féle molekuláris áramok létezésének kérdéséről.

1916 márczius 2. Lukács Ferencz: Összefüggés a polynom értékkészlete és integrálja között. Brody Imre: Az opalescentia Einstein-féle elméletéről.

1916 márczius 16. Geöcze Zoárd: A terület Peano-féle definitiója. Anderkó Aurél: A mechanikai hőegyenérték egy meghatározási módjáról.

1916 márczius 30. Egerváry Jenő: A Bertrand-féle probléma a seismológiában. Schrodt István: Aerodinamikai mérési eljárások (bemutatással).

1916 május 11. Lukács Ferencz: Folytonos függvények megközelítése egész együtthatójú polynomokkal.

Kimutatás

az 1915. év folyamán befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek :

Az 1908. évre : Bruckner Károly 6 kor., Csibertics Imre 6 kor., Novobátzky Károly 6 kor. Összesen ... 18 K.

Az 1909. évre : Bruckner Károly 6 kor., Novobátzky Károly 6 kor. Összesen ... 12 K.

Az 1910. évre : Bruckner Károly 6 kor., Fejér Lipót 6 kor., Novobátzky Károly 6 kor., Tasch Antal 6 kor. Összesen 24 K.

Az 1911. évre : Balog Mór 10 kor., Bruckner Károly 2 kor., Fejér Lipót 6 kor., Jurányi Henrik 10 kor., Lukács Ferencz 6 kor., Novobátzky Károly 6 kor., Tasch Antal 6 kor. Összesen ... 46 K.

Az 1912. évre : Balog Mór 10 kor., Fejér Lipót 10 kor., Jurányi Henrik 10 kor., Klein Magda 10 kor. Lukács Ferencz 6 kor., Novobátzky Károly 6 kor., Szűcs Adolf 10 kor., Tasch Antal 6 kor., Winter József 10 kor. Összesen ... 78 K.

Az 1913. évre : Csemez József 10 kor., Fröhlich Károly 10 kor., Hronyecz György 6 kor., Jurányi Henrik 10 kor., Klein Magda 10 kor., Küssler Elly 10 kor., Lengyel Imre 6 kor., Lákács Ferencz 6 kor., Novobátzky Károly 6 kor., Szűcs Adolf 10 kor., Winter József 10 kor. Összesen ... 94 K.

Az 1914. évre : Anderko Aurél 10 kor., Bálint Elemér 10. kor., Barabás Jenő 6 kor., Ballenegger Andor 10 kor., Csemez József 10 kor., Csizhegyi Lajos 6 kor., Demeter István 6 kor., Fabinyi Rudolf 6 kor., Fodor László 6 kor., Fröhlich Károly 10 kor., ifj. Füzy Rezső Vilmos 10 kor., Gáti Béla 10 kor., Gidró Bonifácz 6 kor., Hang Dániel 6 kor., Hatvani Ede 10 kor., Hronyecz György 6 kor., Hercz Szidónia 6 kor., Jurányi Henrik 10 kor., Karai Sándor 6 kor., Király László 6 kor., Kiss Dénes 6 kor., Konkoly-Thege Miklós 10 kor., Kopp Lajos 10 kor., Kőnig Dénes 10 kor., Küssler Elly 10 kor., Lakits Ferencz 6 kor., Lengyel Imre 6 kor., Lukács Ferencz 10 kor., Nagy József 6 kor., Novobátzky Károly 6 kor., Pécsi Gusztáv 4 kor., Rucsinszki Lajos 10 kor., Schuller Alajos 10 kor., Sós Ernő 10 kor., Steiner Lajos 10 kor., Strausz Ármin 10 kor., Suták József 10 kor., Szabó József 6 kor., Szépréthy Béla 6 kor., Szűcs Adolf 5 kor., Szomorú Árpád 6 kor., Tőtössy Béla 10 kor., Walther Béla 6 kor., Winter József 10 kor. Összesen ... 349 K.

Az 1915. évre: Ábrahám István 10 kor., Anderko Aurél 10 kor., ifj. Andreánszky István báró 6 kor., Arany Dániel 10 kor., Baranyi Balázs 6 kor., Bartoniek Géza 10 kor., Bauer Mihály 10 kor., Bertram Brunó 6 kor., Bielek Miksa 10 kor., Bodola Lajos 10 kor., Bodócs István 6 kor., Bogyó Samu 10 kor., Borosay Dávid 6 kor., Bozóky Endre 10 kor., Bartoniek Emil 10 kor., Bresztovszky Béla 10 kor., Bak Elza 10 kor., Ballenegger Andor 10 kor., Csizhegyi Lajos 6 kor., Csopey László 10 kor., Czekeliusz Aurél 10 kor., Csősz László 6 kor., Csefó Sándor 6 kor., Dávid Lajos 10 kor., Demeter István 6 kor., Dombay Nárczisz 6 kor., Domonkos Kálmán 6 kor., Éber József 10 kor., Ellend József 6 kor., Félegyházi Antal 6 kor., Frank István 6 kor., Fraunhoffer Lajos 10 kor., Fröhlich Károly 10 kor., Fenyvesi Andor 6 kor., Gidró Bonifácz 6 kor., Goldziher Károly 10 kor., Heller Richárd 6 kor., Heuer Ede 10 kor., Hirschmann Nándor 6 kor., Hortobágyi Zsigmond 6 kor., Hajós Géza 6 kor., Hoffmann Ernő 10 kor., Ilosvay Lajos 10 kor., Jánosi Imre 10 kor., Javorik János 6 kor., Jordán Károly 10 kor., Karai Sándor 6 kor., Koren Dénes 10 kor., Koschovitz Gyula 10 kor., König Dénes 10kor., Kunszt János 6 kor., Küssler Elly 9 kor., Kuzaila Péter 6 kor., Kilczer Gyula 10 kor., Klauber Ernő 10 kor., Lendvai Hugó 6 kor., Lengyel Imre 6 kor., Lévay Ede 10 kor., Lukács Fe- Ferencz 10 kor., Luckhaub Gyula 6 kor., Mihálovich Alajos 6 kor., Mikola Sándor 10 kor., Müller József 10 kor., Molnár Imre 6 kor., Nagy József 6 kor., Neumann Jenő 6 kor., Nyáry Béla 6 kor., Nyirő Jolán 6 kor., Oltvay Rezső 10 kor., Oszlaczky Szilárd 10 kor., Palatin Gergely 6 kor., Pécsi Albert 10 kor., Pécsi Gusztáv 6 kor., Pogány Béla 6 kor., Purpriger István 6 kor., Pogány Iduna 10 kor., Rados Gusztáv 10 kor., Rados Ignácz 10 kor., Rátz László 10 kor., Richter Rezső 10 kor., Riegl Sándor S. J. 6 kor., Rucsinszki Lajos 10 kor., Renner János Lajos 6 kor., Schuller Alajos 10 kor., Selényi Pál 10 kor., Straub L. Gyula 6 kor., Strausz Ármin 10 kor., Schrodt István 10 kor., Székely Károly 6 kor., Szekeres Kálmán 10 kor., Széky István 10 kor., Szőke Béla 10 kor., Szuppán Vilmos 10 kor., Sabó Jenő 6 kor., Széll Kálmán 6 kor., Tihanyi Miklós 6 kor., Tolnay Jenő 10 kor., Tersztyánszky Sándor 6 kor., Tőtössy Béla 10 kor., Tillinger Istvánka 10 kor., Ulreich Ede 6 kor., Vajnóczky István 10 kor., Zilahy László 6 kor., Zipernovszky Károly 10 kor., Zemplén Géza 10 kor. Összesen ... 861 K.

Az 1916. évre: Bodócs István 6 kor., Frőhlich Károly 5 kor., Ilosvay Lajos 10 kor., Kirchknopf András 6 kor., Kuzaila Péter 6 kor., Lévay Ede 10 kor., Mikola Sándor 10 kor., Molnár Imre 6 kor., Pécsi Gusztáv 2 kor., Schrodt István 10 kor., Szőke Béla 10 kor., Széll Kálmán 6 kor., Tihanyi Miklós 6 kor. Összesen ... 93 K.

Az 1917. évre: Pap János 4 kor. Összesen ... 4 K.

Az 1918. évre: Pap János 2 kor. Összesen ... 2 K.

Előfizetési díjat fizettek:

Az 1908. évre: Budapesti m. k. orsz. meteorológiai és földmágnességi intézet 10 kor., Hajduböszörményi ref. főgimnázium 10 kor. Összesen ... 20 K.

Az 1909. évre: Budapesti m. k. orsz. meteorológiai és földmágnességi intézet 10 kor., Hajduböszörményi ref. főgimnázium 10 kor. Összesen ... 20 K.

Az 1910. évre: Budapesti m. kir. orsz. meteorologiai és földmágnességi intézet 10 kor., Hajdúböszörményi ref. főgimnázium 10 kor., Temesvári felső kereskedelmi iskola 10 kor.. Összesen ... 30 K.

Az 1911. évre: Budapesti m. k. orsz. meteorológiai és földmágnességi intézet 10 kor., Hajdúböszörményi ref. főgimnázium 10 kor., Késmárki ág. h. ev. lyceum 10 kor., Miskolczi ref. főgimnázium 6 kor. Összesen ... 36 K.

Az 1912. évre: Budapesti m. k. orsz. meteorológiai és földmágnességi intézet 10 kor., Hajdúböszörményi ref. főgimnázium 10 kor., Nagyváradi áll. főreáliskola 10 kor., Szabadkai városi főgimnázium 10 kor. Összesen ... 40 K.

Az 1913. évre: Budapesti II. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti m. k. orsz. meteorológiai és földmágnességi intézet 10 kor., Hajduböszörményi ref. főgimnázium 10 kor., Lőcsei áll. főreáliskola 10 kor., Nagyváradi áll. főreáliskola 10 kor., Pozsonyi áll. főreáliskola 10 kor., Szabadkai városi főgimnázium 10 kor. Összesen ... 70 K.

Az 1914. évre: Bndapesti V. ker. állami főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. felsőbb leányiskola 10 kor., Budapesti X. ker. (tisztviselőtelepi) áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti Báró Eötvös-kollégium 10 kor., Budapesti m. k. orsz. meteorológiai és földmágnességi intézet 10 kor., Dési áll. főgimnázium 10 kor., Dévai áll. főreáliskola 10 kor., Hajdu-böszörményi ref. főgimnázium 10 kor., Ipolysági áll. főgimnázium 10 kor., Kézdivásárhelyi kath. főgimnázium 10 kor., Kisujszállási ref. főgimnázium 10 kor., Kolozsvári egyetemi ábrázoló mértani intézet 10 kor., Kolozsvári kegyesr. Kalazantinum 10 kor., Kilián Frigyes 10 kor., Lőcsei áll. főreáliskola 10 kor., Nagyváradi áll. főreáliskola 10 kor., Pozsonyi állami főreáliskola 10 kor., Sepsiszentgyörgyi ref. Mikó-kollégium 10 kor., Szabadkai városi főgimnázium 10 kor., Temesvári áll. felsőbb leányiskola 10 kor. Összesen ... ... 200 K.

Az 1915. évre: Bártfai áll. gimnázium 10 kor., Békéscsabai ág. h. ev. Rudolf-főgimnázium 10. kor., Békéscsabai áll. felsőbb leányiskola 10 kor., Brádi áll. polgári fiúiskola 10 kor., Budapesti V. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. felsőbb leányiskola 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti tanárképző intézet gyakorló főgimnáziuma 10 kor., Budapesti VIII. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti X. ker. (kőbányai) áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti Norbertinum főkormányzósága 10 kor., Budapesti ciszt. r. tanárképző intézet elöljárósága 10 kor., Budapesti m. k. tudományegyetem könyvtára 10 kor., Csíkszeredai róm. kath. főgimnázium 10 kor., Debreczeni áll. főreáliskola 10 kor., Debreczeni ref. főgimnázium 10 kor., Dévai áll. főreáliskola 10 kor., Dombovári kir. kath. főgimnázium 10 kor, Erzsébetvárosi áll. főgimnázium 10 kor., Egri áll. főreáliskola 10 kor., Fogarasi áll. főgimnázium 10 kor., Fiumei áll. főgimnázium 6 kor., Győri áll. főreáliskola 10. kor., Gyulai róm. kath. főgimnázium 10 kor., Gyulafehérvári róm. kath. főgimnázium 10 kor., Gyergyószentmiklósi áll. főgimnázium 10 kor., Harsányi Frigyes 10 kor., Hajdunánási ref. főgimnázium 10 kor., Jászói prépostság könyvtára 10 kor., Jászberényi áll. főgimnázium 10 kor., Ipolysági áll. főgimnázium 10 kor., Karczagi ref. főgimnázium 10 kor., Kecskeméti áll. főreáliskola 10 kor., Kilián Frigyes 10 kor. Kecskeméti ref. főgimnázium 10 kor., Kegyestanítórend főnöksége 10 kor., Kálmán Dezső 5 kor., Kisvárdai áll. főgimnázium 10 kor., Lugosi áll. főgimnázium 6 kor., Makói áll. főgimnázium 10 kor., Marosvásárhelyi róm. kath. főgimnázium 10 kor., Miskolczi ref. főgimnázium 10 kor., Nagyenyedi Bethlen-főiskola könyvtára 10 kor., Nagyszebeni áll. főgimnázium 10 kor., Nagykállói áll. főgimnázium 10 kor., Nagyváradi róm. kath. tanítónőképző intézet 10 kor., Pannonhalmi főapátsági könyvtár 10 kor., Pozsonyi áll. főreáliskola 10 kor., Privigyei kegyesr. főgimnázium 10 kor., Soproni ág. h. ev. lyceum 10 kor., Soproni áll. főreáliskola 10 kor., Szabadkai városi főgimnázium 10 kor., Szakolczai kir. kath. főgimnáziám 10 kor., Szarvasi ág. h. ev. főgimnázium 10 kor., Szekszárdi áll. főgimnázium 10 kor., Székelyudvarhelyi r. k. főgimnázium 6 kor., Székesfehérvári áll. főreáliskola 10 kor., Székesfehérvári áll. felsőbb leányiskola 10 kor., Szászvárosi ref. Kún-kollégium 6 kor., Temesvári áll. főgimnázium 10 kor., Temesvári áll. főreáliskola 10 kor., Ungvári kir. kath. főgimnázium 10 kor., Ujházy László 5 kor. Összesen ... 614 K.

Az 1916. évre: Jászberényi áll. főgimnázium 6 kor., Malaczkai zárdafőnökség 10 kor. Összesen ... 16 K.

Összesen befolyt:

Hátralékos tagdíjakból ...	621 K.
Folyó és jövő évi tagsági díjakból ...	960 «
Előfizetési díjakból ...	1046 «
Összesen:	2627 K.

Budapesten, 1915. évi deczember hó 31-én.

Privorszky Alajos
pénztárnok.

A Mathematikai és Physikai Társulat választmánya mély megilletődéssel jelenti, hogy titkára

Dr. ZEMPLÉN GYŐZŐ

műegyetemi tanár

a déltiroli harctéren f. évi junius hó 29-én ellenséges golyótól találva életének 37-ik évében elesett.

Mint tudós nemes idealismussal gyarapította nemzetünk kulturális javait, munkájával dicsőséget szerezve önmagának és nemzetének. A sors azonban a tudomány munkateréről a harctérre szólította s mint igaz férfi küzdött itt is, míg a kegyetlen végzet tőlünk el nem rabolta.

A magyar fizikusok kegyeletes érzése sokszor fogja felkeresni idegenben lévő sírját s dicső emlékezetét híven fogja megőrizni.

Budapest, 1916. év november hóban.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI
LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K, A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

25. évfolyam. 1916. május—október. 5—6. füzet.

AZ ELEKTRONHIPOTHÉZIS A FÉNYELMÉLETBEN.

A következő összefoglaló ismertetésemben rövid áttekinthető képét óhajtom adni annak: mikép használja fel a fényelmélet az elektronhipothézist a fényjelenségek magyarázatára? De csak a legegyszerűbb elméletet óhajtom ismertetni, mely feltételezi, hogy az elektron mozgása a különböző fajú elektronokból álló komplexumban *teljesen* úgy megy végbe, mintha az elektron különben azonos körülmények között magában volna. Az általános, a különböző fajú elektronok egymásra való hatását is tekintetbe vévő elmélettel, melynek kifejtése napjainkban még folyamatban van, nem óhajtok foglalkozni; mert az általános elmélet az egyszerübb elmélet eredményeit bár formában igen nagy mértékben, de *lényegében* a legtöbb, *de nem minden* esetben, csak kevéssé módositja. Különben is az általános elmélet rendkívül bonyolódott volta miatt sem alkalmas ily egyszerű összefoglaló ismertetésre.

1. §. Az elektromágneses fényelmélet s ez elmélet fogyatékosságai.

Mielőtt az elektronhipothézis alapján kifejtett fényelmélet ismertetésére reátérek, szükségesnek tartom, hogy röviden az elektromágneses fényelméletet ismertessem. Szükséges ez elsősorban és főleg azért, hogy kiemelhessem azokat a tapasztalati tényeket, melyek az elektromágneses fényelmélet módosítását és az elektronhipothézis bevonását teszik szükégessé.

Az elektromágneses fényelméletet Faraday mondotta ki s

Maxwell mathematikai formába öltötte. Ez elmélet ama hipothezisen nyugszik, hogy *a fény a homogén, izotrop, átlátszó közegben ép úgy terjed tova, miként az elektromágneses hullám a homogén izotrop izolátorban.*

A fény e szerint elektromágneses hullámnak tekintendő, a melyben az elektromos és a mágneses erő egymásra merőleges irányban igen gyorsan oszcillál s a melyre az elektrodinamikának valamennyi hipothézise és alapegyenlete közvetlenül alkalmazandó.

Czélom nem lehet az, hogy a Faraday-Maxwell-féle elektromágneses felfogást részletesen ismertessem, meg kell elégednem azzal, hogy röviden jellemezzem e felfogás lényegét s idézzem azokat az alapegyenleteket, a melyek az elektromágneses erőteret meghatározzák.

Faraday a dielektromos jelenségek magyarázatára azt a hipothezist vezette be, hogy a dielektrikumok apró, mérhetetlen kicsiny oly részecskékből állanak, a melyek úgy az elektromos erő, mint a mágneses erő befolyása folytán polározódnak. Minden egyes ily kicsiny részecskében, a neutrális állapotban, a pozitiv és a negativ elektromosság egyenlő quantuma egyenletesen van elosztva.

Valamely külső elektromos erő e részecskék neutrális állapotát megbontja, a mennyiben a részecskék belsejében a pozitiv elektromosságot az egyik, a negativot pedig az ellenkező irányban tolja el; azaz az elektromos erő elektromos eltolódást létesit. Miként az elektromos erő a dielektrikumban az elektromos folyadékok között elektromos eltolódást kelt, úgy a mágneses erő is a kétfajta mágneses folyadék között mágneses eltolódást idéz elő.

A Faraday-Maxwell-féle felfogás lényege most már abban áll, hogy úgy az elektromos, mint a mágneses eltolódás elektromágneses hatást létesit, még pedig az elektromos eltolódásnak teljesen ugyanaz a hatása van, mint a közönséges elektromos áramnak, a mágneses eltolódásnak pedig induktiv hatás tulajdonítandó. Az elektromos eltolódás tehát maga körül mágneses erőteret kelt, a mágneses eltolódás pedig elektromos áramot indukál.

Azt, a mit ily módon röviden, pár szóban foglaltam össze, fejezik ki az elektrodinamikának alapegyenletei, a szerzőjükről elnevezett Maxwell-féle differenciálegyenletek.

Jelöljük $\mathfrak{E}$-vel az elektromágneses hullámban, a fényben tovaterjedő elektromos erőt irány és nagyság szerint, $\mathfrak{H}$-val a mágneses erőt, $\mathfrak{i}$-vel az elektromos áram sűrűségét, azaz az áram irányára merőlegesen elhelyezett felületegységen az időegység alatt átáramló elektromos quantumot, $\mathfrak{j}$-vel a mágneses eltolódás sűrűségét, akkor a Maxwell-féle differenciálegyenleteket a következő jól ismert vektoralakban írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} 4\pi\mathfrak{i} &= c \operatorname{curl} \mathfrak{H} \\ 4\pi\mathfrak{j} &= -c \operatorname{curl} \mathfrak{E}, \end{aligned} \tag{1}$$

a hol c az elektromágneses mértékrendszernek az elektrosztatikus mértékrendszerhez vonatkoztatott viszonyát, vagy más értelmezés szerint a fénynek a légüres térben való terjedési sebességét jelenti.

E vektoregyenletekben, vagy e vektoregyenletekkel æquivalens hat differenciálegyenletben nincs egyetlen oly állandó sem, a mely a közegre nézve jellemző; ez egyenletek levezetésénél nem történik a közegre nézve semminemű megszorítás, miért is ez egyenletek teljesen általános érvényűek. Érvényesek ezek úgy az izotrop, mint anizotrop, vezető mint nemvezető, forgató mint nemforgató, homogén mint inhomogén s a mágneses aktiv közegekre nézve is, a különbség csak abban van, hogy az egyes speciális esetekben az egyes hipothéziseknek megfelelőleg az $\mathfrak{i}$ és $\mathfrak{j}$ értéke más és más.

Abban a speciális esetben, a melyben a közeg az elektromosságot vezeti, az $\mathfrak{i}$ értéke két részből áll. Az egyik rész a közeg vezetőképessége folytán származik, ennek értéke $\sigma\mathfrak{E}$, a másik rész ellenben abból az okból ered, hogy az elektromos eltolódás folytán a keresztmetszeten bizonyos elektromos quantum halad keresztül, ez utóbbinak értéke $\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}$, ha σ a közeg vezetőképességét, ε a dielektromos állandóját jelenti. Azaz

$$\mathfrak{i} = \sigma\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}. \tag{2}$$

Ezzel szemben a mágneses eltolódás sűrűsége csak egyetlen egy részt tartalmaz, mert oly közeg, mely a mágneses folyadékot vezeti, egyáltalában nincs. Tehát

$$\mathfrak{j} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{3}$$

hol μ a mágneses permeabilitást jelöli.

Ha már most az i-nek és j-nek eme, a FARADAY-féle felfogásból folyó, értékeit a MAXWELL-féle differenciálegyenletekbe helyettesítjük, nyerjük:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\sigma\mathfrak{E} + \varepsilon\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} &= c \operatorname{curl} \mathfrak{H} \\ \mu\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} &= -c \operatorname{curl} \mathfrak{E} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

a MAXWELL-féle differencziálegyenleteknek azt az alakját, a melyből az elektromágneses fényelmélet kiindul s a melyből az átlátszó ($\sigma=0$) és az elnyelő ($\sigma \neq 0$) közegek valamennyi optikai tulajdonságát levezeti.

Ha már most ez alapegyenletekből tisztán mathematikai meggondolások útján levezetett eredményeket s elméleti következtetéseket a tapasztalattal egybevetjük, akkor arra jutunk, hogy igen nagy számú elméleti eredmeny a tapasztalattal qualitative és quantitative fényesen megegyezik. Vannak azonban elméleti eredmények és tapasztalati tények, melyek között lényeges és mélyreható eltérések konstatálhatók.

Így a (4) alatti egyenletekből következik, hogy a fény törésmutatója n, továbbá a közeg dielektromos állandója ε és mágneses permeabilitása μ között

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \tag{5}$$

összefüggés áll fenn. Tehát az elektromágneses felfogás értelmében a fény törésmutatója oly állandója a közegnek, mely a fény hullámhosszától, a fény színétől teljesen független. A tapasztalat szerint azonban a törésmutató lényegesen függ a fény színétől. *Tehát az elektromágneses fényelmélet a diszperzió magyarázatát nem adja meg.*

De eltérés van a törésmutató értékében is. A míg néhány esetben a törésmutatónak az elektromágneses úton, tehát az ε és μ ismeretével számított értéke, az optikai mérések útján nyert értékével alacsony frequenciájú fényhullámra nézve elég jól megegyezik, addig igen nagy számban vannak oly közegek, a melyeknél a megegyezés a legkisebb mértékben sincs meg. Így a víz dielektromos állandója közel 80, mágneses permeabilitása közel 1; az elektromágneses úton számított törésmutató értéke tehát $\sqrt{80} \approx 9$,[1] holott az optikai úton mért törésmutató értéke például a nátrium D vonalára nézve 1·333, mely attól teljesen különbözik.

Ugyancsak nagy az eltérés az elmélet és a tapasztalat között a fény abszorpciójánál és ezzel kapcsolatos jelenségeknél is. Így az elektromágneses fényelmélet nem magyarázza elég kielégítően, mi az oka annak, hogy bizonyos fémek, mint például az arany, a réz egyes színeket különös mértékben reflektálnak.

De mindezek az eltérések szinte eltörpülnek azokhoz az óriási különbségekhez képest, *melyek az elektromágneses fényelmélet és a magneto- s elektrooptikai jelenségek között konstatálhatók.*

A Maxwell-féle differenciálegyenletek a Faraday-féle fogalmazásban (a (4) egyenletek) teljesen változatlanok maradnak, ha a közeget, melynek optikai tulajdonságait vizsgáljuk, elektromágneses erőtérbe helyezzük. Ez annyit jelent, hogy az elektromágneses felfogás szerint a fényjelenségnek teljesen függetlennek kell lennie attól, vajjon a közeg vagy a fényforrás mág-

---

1 A $\approx$ jel «közel egyenlő»-t jelent.

neses erőtérben van jelen vagy pedig nincs? Már pedig a tapasztalat szerint az elektromágneses erőtér *lényeges* mértékben befolyásolja a fényjelenséget, sőt a fény természetét is teljesen megváltoztatja.

Mindezek alapján kivánatos oly elméletnek megkonstruálása, a mely egyrészt az elektromágneses fényelmélet előbb emlitett fogyatékosságait pótolja, másrészt pedig felöleli a magneto- és elektrooptikai jelenségeket is.

Ez elméletnek megkonstruálása az elektronhipothezis bevonásával történik.

2. §. Fényelmélet az elektronhipothézis alapján.

a) *Az elektronhipothézis s az elektron mozgásegyenletei.*

A fény diszperziójának, abszorpciójának, a magneto- és az elektrooptikai jelenségeknek igen jó és a tapasztalattal szépen megegyező elméletéhez jutunk, ha feltételezzük azt, hogy a közeg legkisebb részecskéi, molekulái, atomjai rezgésre képesek s hogy e részecskék annál nagyobb mértékben jönnek rezgésbe, minél közelebb van a részecskék saját frequenciája a rezgést keltő külső ok, a közeghez érkező fényhullám frequenciájához.

Ily rezgő mechanismust könnyen elképzelhetünk magunknak, ha a molekulákban pozitiv és negativ elektromos töltéseket gondolunk, melyeket bizonyos erők kötnek a molekulákhoz s a fényt elektromágneses hullámnak tekintjük, a melyben az elektromos és a mágneses erő igen gyorsan oszcillál.

Mielőtt e részecskék mozgásegyenleteinek felállítására s a belőlük vonható következtetések ismertetésére reáterek, az elektronhipothezist egyszerű fogalmazásába kell bevezetnem.

Az elektronelmélet negativ elektromossággal töltött részecskék létezéséből indul ki. Feltételezi azt, hogy minden negativ elektromos quantum apró elektromos quantumokból van összetéve; felveszi, hogy van oly legkisebb elektromos quantum, melynél kisebb nincs, a mely tehát további részekre nem osztható s a melyekből minden negativ elektromos quantum össze van téve. Ezt a lehető legkisebb elektromos quantumot, a mely további részekre már nem osztható, nevezzük: *elektronnak.* Az atomok ily elektronokat tartalmaznak. Az az atom, melynek összes elektronjai megvannak s benne egyenletesen vannak eloszolva, kifelé semmiféle hatást nem gyakorol, neutrális állapotban van. Ha azonban az atom egy vagy több, vagy pedig összes elektronjait elveszíti, akkor az atomban hiánya lép fel a negativ elektromosságnak, az atom elveszíti neutrális állapotát s oly tulajdonságot vesz fel, a mely az elektromosság két fluidumos elméleténél a pozitiv elektromosság tulajdona. Az elektronelmélet tehát csak negativ elektromosságot: *elektront,* s elektromosság nélküli ponderikus atomot: *anyagot* ismer. Az elektronnak nincs ponderikus tömege, de mozgásakor van bizonyos tehetetlensége, mely a mozgásállapot változásában akadályozza, s így a tömeg szerepét viszi, van tehát látszólagos, elektromágneses tömege, melynek számértéke körülbelül 2000-szer kisebb a hidrogén-atom ponderikus tömegénél. Az elektronok a vezetőkben szabadon mozognak, de az izolátorokban s bizonyos számban még a fémekben is a molekulákhoz vannak kötve.

Ha ily, a molekulához kötött elektron valamely külső ok következtében nyugalmi helyzetéből kimozdul, akkor az elektronelmélet szerint azonnal fellép egy erő, mely az elektront nyugalmi helyzetébe visszatéríteni törekszik. Ennek az erőnek iránya az elektron mindenkori nyugalmi helyzete felé tart s nagysága a nyugalmi helyzettől való távolságával arányos. Ez erő tehát teljesen oly karakterű, mint az az elasztikus (rugalmas) erő, mely valamilyen tömegpontot harmonikus rezgőmozgásra kényszerít. Ép ez okból *quazielasztikus erőnek* szokás nevezni. E quazielasztikus erő, ha az elektron mindenkori helyzetének a nyugalmi helyzetétől való távolságát irány és nagyság szerint $\mathfrak{r}$-el jelöljük:

$$-k\mathfrak{r}.$$

Ily quazielasztikus erő fellépését könnyen elképzelhetjük magunknak, ha feltételezzük, hogy az atom ponderikus tömege (melyről láttuk, hogy pozitiv elektromos karakterű), az elektron nyugalmi helyzete körül tömör gömbben egyenletesen van eloszolva. Ismeretes ugyanis, hogy egyenletes eloszlású pozitiv elektromos karakterű tömör gömb, a gömb belsejében lévő negativ elektromosságra, az elektronra oly erőt fejt ki, mely mindenkor a gömb középpontja felé van irányitva, nagysága pedig az elektronnak a gömb középpontjától való távolságával arányos.

E quazielasztikus erő az elektront nyugalmi helyzete körül harmonikus rezgő mozgásra kényszeriti. De a rezgő elektron a MAXWELL-féle felfogás értelmében elektromágneses energiát sugároz ki a térbe. Ez energia-áramlásnak forrása az elektron energia-készlete, a mely tehát az idő folyamán csökkenni kénytelen. Magyarázatára az elektronelmélet feltételezi, hogy a mozgó elektronra bizonyos *csillapító erő* is hat, mely erő az elektron mindenkori sebességével $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$-vel ellentett irányú s azzal arányos, tehát $=$

$$-h\frac{d\mathfrak{r}}{dt}.$$

Egy, a nyugalmi helyzetéből kimozditott s azután magára hagyott elektronra tehát két erő, *a quazielasztikus erő és a csillapító erő hat.* Az elektron e két erő hatása alatt mozgást végez, melynek differenciálegyenlete vektorformában:

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -k\mathfrak{r} - h\frac{d\mathfrak{r}}{dt}, \tag{6}$$

a hol m az elektron elektromágneses tömegét jelenti.

E vektoregyenlet, vagy a vele æquivalens három differenciálegyenlet a kezdeti feltételekkel együtt teljesen leirja a mozgást. Ez a mozgásegyenlet a csillapitott rezgőmozgás differenciálegyenlete, miért is ahhoz az eredményhez jutunk, hogy a nyugalmi helyzetéből kimozditott s azután magára hagyott elektron csillapitott rezgőmozgást végez, melynek frequenciája első közelitésben

$$\nu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

és csillapodási faktora

$$\mu = \frac{h}{2m}.$$

A ν_0 frequenciát, vagyis a belső erők hatása alatt létrejövő mozgás frequenciáját, az elektron *saját frequenciájának* nevezzük.

Tegyük most már fel, hogy ily rezgésre képes elektronhoz kívülről fényhullám érkezik.

Az elektronhipothezis alapján kifejtett fényelmélet ép úgy, mint az elektromágneses fényelmélet a fényt elektromágneses hullámnak tekinti, a melyben az elektromos erő $\mathfrak{E}$ és a mágneses erő $\mathfrak{H}$ igen gyorsan oszcillál. Az elektronelmélet feltételezi továbbá azt, hogy e mágneses erőnek az elektronra észrevehető hatása nincs (tehát a közeg mágneses permeabilitása $\mu=1$), az elektromos erő ellenben az elektronra hatással van.

Ha az elektron elektromos töltését e-vel jelöljük, akkor az elektromágneses hullámban tovaterjedő elektromos erő $\mathfrak{E}$ jelenlétele folytán, az elektronra $e\mathfrak{E}$ erő hat, mely az elektront nyugalmi helyzetéből kimozdítja. Mihelyt az elektron nyugalmi helyzetéből kimozdul, azonnal fellép a quazielasztikus erő $-k\mathfrak{r}$, s az elektron mozgása folytán a csillapitó erő $-h\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$, úgy, hogy az elektronra három erő, *az elektromos, quazielasztikus és a csillapító erő* hat. Az elektron megváltozott mozgásegyenlete e szerint:

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = e\mathfrak{E} - k\mathfrak{r} - h\frac{d\mathfrak{r}}{dt}. \tag{7}$$

E vektoregyenlet a kezdeti feltételekkel együtt egyértelműleg határozza meg az elektron mozgását.

Ha e differenciálegyenletbe a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását $e^{i\nu t}$-t helyettesitjük, a hol ν a közeghez érkező fényhullám frequenciáját jelöli, akkor az elektron mindenkori elongációját a következő formula határozza meg:

$$\mathfrak{r} = \frac{e\mathfrak{E}}{k+ih\nu-m\nu^2} = \frac{\frac{e}{m}\mathfrak{E}}{\nu_0^2+i\frac{h}{m}\nu-\nu^2}. \tag{8}$$

Az elektron mozgására vonatkozó eme fejtegetéseink ismertetése után reátérünk az elektron-hipothezis alapján kifejtett fényelmélet ismertetésére.

Mindenekelőtt megállapitjuk azt a kardinális eltérést, mely az elektromágneses fényelmélet és az elektron-hipothezis alapján felépitett fényelmélet között fennáll s meghatározzuk azt az alapformulát, miből ez utóbbi elmélet összes következtetéseit levezeti.

b) *Az elmélet alapformulája; a komplex törésmutató alakja.*

Az elektronhipothezis alapján kifejtett fényelmélet ép úgy, mint az elektromágneses fényelmélet kiindul az (1) alatti általános érvényességű MAXWELL-féle differenciálegyenletekből. Ez egyenletek alakját kell most a jelen hipothézisnek megfelelően megállapitani.

Az i értéke két részből áll. Az egyik rész azon oknál fogva származik, mert a molekulák közeit betöltő szabad ætherben az elektromos erő az idő folyamán változik. Ennek értéke (2) szerint $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}$, mert a szabad æther dielektromos állandója 1. Az áram intenzitásának második része az elektron rezgése folytán ered. Az elektron rezgése következtében ugyanis a sebességnek, a $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$-nek irányára merőleges felületen az idő folyamán bizonyos elektromos quantum halad keresztül. Az az elektromos quantum, a mely e felület egységén az időegység alatt átáramlik, az áram sűrűségének keresett második része. Jelöljük a térfogategységben lévő elektronok számát N-nel, akkor az áram sűrűségének az a része, mely az e elektromos töltésű és m tömegű elektronok rezgése folytán származik

$$eN\frac{d\mathfrak{x}}{dt},$$

mely (8) szerint

$$\frac{\frac{e^2}{m}N}{\nu_0^2+i\frac{h}{m}\nu-\nu^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}$$

alakban írható.

Mivel továbbá a molekulákban különfajta elektronok lehetnek, melyek úgy az elektromos töltés, mint a látszólagos tömeg tekintetében egymástól különbözhetnek, ezért az áram intenzitásának az a része, mely az elektronok rezgése folytán származik

$$\sum\frac{\frac{e^2}{m}N}{\nu_0^2+i\frac{h}{m}\nu-\nu^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t},$$

a hol a Σ az összes elektronfajra terjesztendő ki.

A Maxwell-féle differenciálegyenletben szereplő $\mathfrak{i}$ értéke tehát

$$\mathfrak{i}=\frac{1}{4\pi}\left(1+4\pi\Sigma\frac{\frac{e^2}{m}N}{\nu_0^2+i\frac{h}{m}\nu-\nu^2}\right)\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Ezzel szemben a mágneses eltolódás sűrűsége

$$\mathfrak{j}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t},$$

mert feltételünk értelmében a mágneses erő az elektronra hatással nincs, azaz a közeg nem mágnesezhető, permeabilitása $\mu=1$.

Az elektronhipothézis alapján felépített fényelmélet kiinduló pontját képező MAXWELL-féle differenciálegyenletek alakja tehát a következő:

$$\left.\begin{aligned}\left(1+4\pi\Sigma\frac{\frac{e^2}{m}N}{\nu_0^2+i\frac{h}{m}\nu-\nu^2}\right)\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}&=c\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H}\\ \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}&=-c\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{E}\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

E differenciálegyenletek képezik a fényelmélet alapját. Alakjukat illetőleg teljesen identikusak a MAXWELL-féle differenciálegyenleteknek a FARADAY-féle felfogás alapján felállított azzal a formájával (4), mely az átlátszó, azaz a nem vezető, $\sigma=0$ és a nem mágnesezhető $\mu=1$ közegre nézve érvényes, azzal a különbséggel, hogy a jelen esetben az $\varepsilon=n^2$ dielektromos állandó helyében

$$\mathfrak{n}^2=1+4\pi\Sigma\frac{\frac{e^2}{m}N}{\nu_0^2+i\frac{h}{m}\nu-\nu^2} \quad (10)$$

mennyiség áll.

Mindazok a mathematikai formulák és elméleti következtetések tehát, a melyek az elektromágneses fényelméletből következnek, érvényesek lesznek a jelen esetben is, csupán minden kifejezésben az n törésmutató helyébe a (10) alatti mennyiség helyettesítendő.

A mig azonban ilyetén módon a két elmélet formailag teljesen megegyezik egymással, addig lényegében e két elmélet között igen nagy különbség van. A különbség abból származik, hogy a jelen esetben a valós törésmutató helyébe komplex mennyiség, a komplex törésmutató $\mathfrak{n}$ lépett.

Az első kérdés most már az: mi a *komplex törésmutató* fizikai jelentése?

Könnyen kimutatható, a részletekbe nem bocsátkozhatom, hogy ha e törésmutatót

$$\mathfrak{n} = n(1 - i\varkappa)$$

alakban írjuk, a hol n és $\varkappa$ pozitiv mennyiségeket jelentenek, akkor e komplex törésmutatójú közegben valamely (például a $+z$ tengely) irányában tovaterjedő fény állapotát meghatározó elektromos erő (ép így a mágneses erő is) az

$$\mathfrak{E} = Ee^{-2\pi\varkappa\frac{z}{\lambda}} e^{i\left(\nu t - 2\pi\frac{z}{\lambda}\right)}$$

alakban írható. Vagyis a fény állapotát kifejező vektor amplitudója a fény tovaterjedése irányában csökken, a fény intenzitása kisebbedik, azaz a fény abszorpciót szenved.

Ha $\varkappa = 0$, azaz a törésmutató $\mathfrak{n} = n$ valós, akkor a fényhullám aplitudója állandó, a fény gyengülés nélkül halad át a közegen; ha ellenben $\varkappa \neq 0$, azaz $\mathfrak{n}$ komplex, akkor a fény abszorpciót szenved. *A komplex törésmutató fizikai jelentése tehát az abszorpció.*

A törésmutató valós abban az esetben, ha az $\mathfrak{n}^2$-nak (10) alatti kifejezésében a $\frac{h\nu}{m}$ a $\nu_0^2 - \nu^2$-hoz képest elhanyagolható csekély, azaz mivel h igen kis szám, valahányszor a $\nu_0^2 - \nu^2$ a zérustól észrevehetően különbözik. ν_0 a közegben lévő bizonyos elektronfaj saját frequenciáját, ν pedig a közeghez érkező, az elektron kényszermozgását létesitő fényhullám frequenciáját jelenti. *Ha tehát a közeg elektronjai között nincs egyetlen egy oly elektronfaj sem, melynek saját frequenciája a közeghez érkező fényhullám frequenciájával identikus vagy azzal közel egyenlő, azaz, amiként azt kifejezni szokás, nincs egyetlen egy oly elektron sem, mely a közeghez érkező fényhullám frequenciájára rezonál, akkor a közeg törésmutatója valós, a közeg a fényt nem nyeli el. Ha azonban az elektronok között csak egyetlen egy oly elektron is van, a melynek saját frequenciája a közeghez érkező fényhullám frequenciájával identikus, vagy azzal közel egyenlő, azaz van oly elektron, mely a közeghez érkező fényhullám frequenciájára rezonál, akkor* $\frac{h\nu}{m}$ *a* $\nu_0^2 - \nu^2$*-hoz képest* *el nem hanyagolható, a törésmutató komplex, $\varkappa$ zérustól különbözik, azaz a fény abszorpciót szenved.*

Miután ilyetén módon az elektronhipothézis alapján kifejtett fényelmélet lényegét és alapegyenleteit megállapítottam, reátérek speciális kérdések fejtegetésére.

Elsősorban és főleg azokkal a jelenségekkel óhajtok foglalkozni, melyekről láttuk, hogy az elektromágneses fényelmélet alaphipothéziseivel nem magyarázhatók.

c) *A diszperzió.*

Vegyük fel, hogy a szóbanforgó *közeg a látható fényre nézve teljesen átlátszó.*

Ez a feltevés az előzőek szerint annyit jelent, hogy a közeg (10) alatti törésmutatója valós, azaz, hogy a közeg elektronjai között nincs egyetlen egy oly elektron sem, melynek frequenciája a látható spektrumba esik. Az elektronok saját frequenciái a spektrum láthatatlan részeiben: az ultraibolya és az ultravörös részében vannak. Jelöljük az ultraibolyában lévő sajátfrequenciákat megkülönböztetés céljából ν_i-vel, az ultravörösben levőket ν_v-vel; válaszszuk azután a (10) alatti formulában e két részhez tartozó tagokat külön s írjuk azokat a következő formában:

$$n^2 = 1 + 4\pi \sum \frac{\frac{e^2}{m} N}{\nu_i^2 - \nu^2} + 4\pi \sum \frac{\frac{e^2}{m} N}{\nu_v^2 - \nu^2} =$$

$$= 1 + 4\pi \sum \frac{\frac{e^2}{m} N}{\nu_i^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\nu}{\nu_i}\right)^2} - 4\pi \sum \frac{\frac{e^2}{m} N}{\nu^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\nu_v}{\nu}\right)^2}.$$

Mivel pedig

$$\nu_v < \nu < \nu_i$$

ezért $\frac{\nu}{\nu_i} < 1$, $\frac{\nu_v}{\nu} < 1$ lévén, a Σ alatti törtek egy-egy végtelen geometriai sor összegének tekinthetők, úgy hogy a közeg törésmutatója

$$n^2 = A + B\nu^2 + C\nu^4 + \cdots - \frac{B'}{\nu^2} - \frac{C'}{\nu^4} - \cdots$$

végtelen sorba fejthető, mely sor a törésmutatónak a frequenciától, a fény színétől való függését kifejezi.

E sor pedig, illetve ennek négy első tagja a KETTELER-HELMHOLTZ-féle disperziós formula, melyről tudvalevő, hogy átlátszó közegek esetén a tapasztalattal elég jól egyezik.

Térjünk ezután az elektromágneses fényelmélet által kielégitően nem magyarázható abszorpció ismertetésére.

d) *Az abszorpció.*

Vegyük fel e czélból azt, hogy a közeg elektronjai között van egy és csakis egyetlen egy oly elektronfaj, a melynek sajátfrequenciája a közeghez érkező fényhullám frequenciájával azonos, vagy azzal közel egyenlő, továbbá, hogy e frequencia közelében más frequencia nincs.

E feltevés az előzőek szerint annyit jelent, hogy a komplex törésmutató (10) alatti formulájában egy és csakis egyetlen egy oly tag van, a melyben a $\frac{h\nu}{m}$ a $\nu_0^2 - \nu^2$-hoz képest el nem hanyagolható. Ha e tagot a (10) alatti formulában a Σ-ból kivesszük, nyerjük, hogy

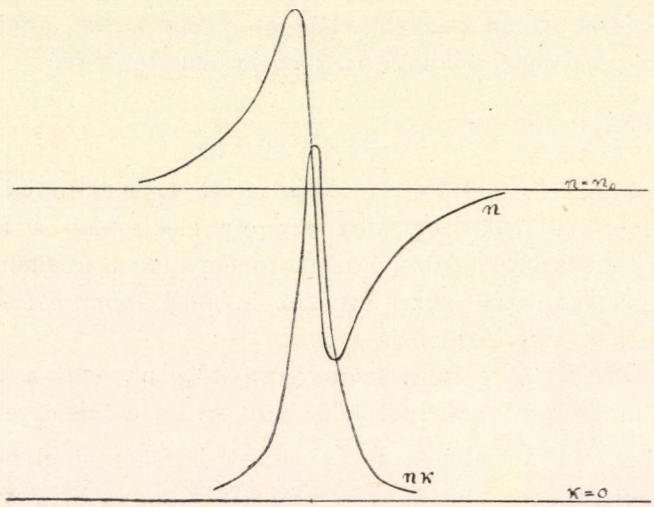
$$\mathfrak{n}^2 = 1 + 4\pi \sum{}' \frac{\frac{e^2}{m} N}{\nu_0^2 - \nu^2} + 4\pi \frac{\frac{e^2}{m} N}{\nu_0^2 + i \frac{h}{m} \nu - \nu^2},$$

a hol a Σ' összeg a szóbanforgó egyetlen egy (rezonáló) elektronfaj kivételével a közegben lévő összes elektronfajra terjesztendő ki.

Ha már most e kifejezésben az $\mathfrak{n}$ helyébe $\mathfrak{n} = n(1 - i\varkappa)$-t írunk, akkor a valós és a képzetes rész szétválasztásával a törésmutatónak n-nek és az abszorpció mértékét meghatározó $n\varkappa$-nak a beeső fény frequenciájától, ν-től való függését explicit formában fejezhetjük ki.

Nem óhajtom eme, aránylag komplikált funkciókat felírni, hanem inkább geometriai ábrában szemléltetem a fennálló viszonyokat.

A mellékelt ábrában a derékszögű koordinátarendszer abscisszája a fényhullám frequenciáját ν-t jelenti, az ordinátája pedig az egyik görbére nézve e frequenciához tartozó törésmutatót n-t, a másik görbénél pedig az abszorpció mértékét meghatározó abszorpciókoefficienst $n\varkappa$-t tünteti elő.



Az ábra szerint, ha a közeghez érkező fényhullám frequenciája növekszik, azaz ha a spektrumban az ultravörös felől az ultraibolya felé haladunk, akkor a törésmutató folytonosan nagyobbodik, vagyis mint mondani szokás, itt a *diszperzió normális;* mihelyt azonban a fényhullám frequenciája a közegben rezgő egyik elektronfaj saját frequenciájával ν_0-val már közel egyenlő, akkor a törésmutató rohamosan csökken, a *diszperzió anomálissá* válik s anomális marad mindaddig, a míg a beeső fény frequenciája az elektron saját freqenciájától ν_0-tól elegendő nagy értékkel nem különbözik; ezután a diszperzió ismét normális lesz.

Az abszorpció-koefficiens értéke pedig mindenütt közel zérus a ν_0 frequencia közelében hirtelen növekszik ν_0-nál maximuma van, ezután ismét csökken s a ν_0-tól csak kissé távolabb ismét közel zérus.

Tehát a ν_0 frequencia közelében egy izolált abszorpciós vonal áll elő. E vonal közelében a diszperzió anomális.

Ha tehát egy közeghez fehér fényt, azaz oly fényt bocsátunk, a melyben az összes frequenciák megvannak, akkor a spektrum ama helyein, melyeknek megfelelő frequenciák a közegben rezgő elektronok saját frequenciáival azonosak, éles abszorpciós vonalakat figyelünk meg.

Ilyfajta, igen nagymérvü abszorpció a fémeken észlelhető. De a fémek az elektromosságot igen jól vezetik, miért is e közegekben az elektronokat szabadon mozgóknak és nem quazielasztikus erővel a molekulákhoz kötötteknek kellene tekintenünk. E feltevésekből vont következtetések azonban semmikép sem egyeznek a tapasztalattal. Miért is ezzel szemben azt a feltevést állítjuk fel, hogy a fémek elektronjai között vannak olyanok, a melyek szabadon mozognak, de ezeken kívül vannak még oly elektronok is, melyek quazielasztikus erővel a molekulákhoz vannak kötve. Ily szabadon mozgó és quazielasztikus erőkkel a molekulákhoz kötött, tehát rezonanciára képes elektronok együttes jelenlétével a fémek valamennyi optikai tulajdonsága jól magyarázható. Ezzel magyarázható az a jelenség is, hogy bizonyos fémek, mint az arany, a réz, a vörös szint különös mértékben reflektálják. E különös mértékben reflektált fény frequenciája az elektronok saját frequenciái.

A fenti hipothezisekből ugyanis az az általános érvényű eredmény következik, hogy minden közeg a reá eső fehér fényből azt a szint veri különös mértékben vissza, melynek frequenciáira a közeg elektronjai rezonálnak, a mely szint, mint láttuk, a közeg elnyel. A spektrum ama részén tehát, a hol a közegnek diszperziója anomális, a fény reflexióképessége igen nagy. E jelenséget *rezonancia visszaverődésnek* nevezzük. Ez eredményt H. RUBENS számos közegnél ultravörös frequenciákra nézve a tapasztalattal egyezőnek találta.

e) *Anizotrop közegek.*

Mielőtt még a magnetooptikai jelenségek ismertetésére reátérek, szólani kívánok arról az általánosításról, a melyet az elektronelmélet abból a czélból vezet be, hogy az anizotrop közeg optikai tulajdonságait magyarázhassa.

Az anizotrop közegek az eddig ismertetett izotrop közegektől abban különböznek, hogy a míg az izotrop közegekben előálló optikai jelenségek a fény tovaterjedésének irányától teljesen függetlenek, addig az anizotrop közegek optikai tulajdonságai a fény tovaterjedésének irányától is függnek. Eme anizotropia magyarázatára az elektronelmélet feltételezi, hogy ily közegekben az elektronokat a molekulákhoz kötő quazielasztikus erő értéke ez erő irányától is függ, a mit a következő feltevéssel vezet be.

Ismeretes, hogy a tömör gömbön kívül még a háromtengelyű ellipszoidnak is megvan az a tulajdonsága, hogy az abban egyenletesen eloszlott (pozitiv elektromos karakterű) anyag az ellipszoid belsejében levő elektronra oly erőt fejt ki, melynek iránya az ellipszoid középpontja felé irányul s nagysága az elektronnak a középponttól való távolságával arányos. Amíg azonban a tömör gömbnél az arányossági faktor független volt az erő irányától (a quazielasztikus erő derékszögű összetevői voltak: $-kx$, $-ky$, $-kz$), addig az ellipszoidnál az arányossági faktor az erő irányának funkciója, még pedig oly függvénye, hogy a quazielasztikus erő derékszögű összetevői az elektron mindenkori koordinátáival a következő lineáris formákban fejezhetők ki:

$$\begin{aligned} &-(k_{11}x + k_{12}y + k_{13}z) \\ &-(k_{21}x + k_{22}y + k_{23}z) \qquad k_{ik} = k_{ki} \\ &-(k_{31}x + k_{32}y + k_{33}z). \qquad {\scriptstyle i,\,k=1,\,2,\,3,\; i \neq k} \end{aligned}$$

Ennek folytán az elektronelmélet az anizotrop közegek optikai tulajdonságainak magyarázatára azt a hipothézist vezeti be, hogy az atom ponderikus tömege az anizotrop közegeknél egy ellipszoidban van egyenletesen elosztva.

Ha már most e hipothézisnek megfelelőleg az elektron mozgásegyenletének (7) alatti formulájában és az (1) alatti MAXWELL-féle differenciálegyenletekben az ott szereplő quazielasztikus erő derékszögű összetevői helyébe a fenti lineáris funkciókat helyettesítjük, nyerjük azokat az alapegyenleteket, a melyekből az átlátszó és elnyelő anizotrop inaktiv (a polározás síkját nem forgató) közegek összes optikai tulajdonságai levezethetők.

Ha most még ezenfelül a közeg a polározás síkját forgatja, azaz aktív, akkor a fenti hipothéziseket még azzal a feltevéssel kell kiegészítenünk, hogy az elektron mozgása az elektronok egymásra való hatása folytán a közegben egy-egy csavarvonalban történik.

De nem óhajtok az elektronelméletet kevésbbé érdeklő eme kérdésekkel hosszasabban foglalkozni, hanem reátérek az elektronelmélet tulajdonképeni talajára, a magnetooptikai jelenségek, főleg pedig a ZEEMAN-féle jelenség ismertetésére, mely tudvalevőleg az elektronelmélet egyik leghatalmasabb támasza.

f) *A magnetooptikai jelenségek.*

A magnetooptikai jelenségeket az elektronhipothézis alapján könnyen magyarázhatjuk.

Ha ugyanis a közegek optikai viselkedését a bennük rezgő elektronok rezgéseinek tulajdonítjuk, akkor világos, hogy a testek optikai tulajdonságainak, a fény természetének meg kell változnia, ha a közeget mágneses erőtérbe helyezzük. Helyezzük tehát a közeget erős elektromágnes sarkai közé s bocsássunk kívülről a közeghez parallel fényhullámot. Ha a mágneses erőtér nincs gerjesztve, akkor az elektronok rezgései akként mennek végbe, miként azt az előzőekben ismertettük. Ha azonban a mágneses erőteret gerjesztjük, akkor az elektronok rezgései mágneses erőtérben történnek, minek következtében az elektronokra a különben működő erőkön kívül még egy elektromágneses erő is hat. Ez erőnek értéket a BIOT-SAVART-féle törvény adja, irányát pedig az AMPÉRE-féle szabály határozza meg. Tehát az elektromágneses erőt irány és nagyság szerint az $\frac{e}{c}\left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt} H\right]$ vektorszorzat fejezi ki, hol $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ az elektron mindenkori sebességét, H a mágneses erőtér intenzitását irány és nagyság szerint, e az elektron töltését, c pedig a fény terjedési sebességét jelenti. Az elektron mozgásegyenletét tehát a (7) alatti egyenlet adja, ha ez egyenlet jobboldalához még ez elektromágneses erőt kapcsoljuk:

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = e\mathfrak{E} - k\mathfrak{r} - h\frac{d\mathfrak{r}}{dt} + \frac{e}{c}\left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt} H\right]. \tag{11}$$

A jelenség további fejtegetésénél két esetet kell megkülönböztetnünk:

1. A közeghez érkező fényhullám az erővonalakkal parallel (az elektromágnes átfúrt sarkain át) terjed tova. Az ebben az esetben érvényes mozgásegyenletekkel megkonstruált MAXWELL-féle differenciálegyenletekből következik, hogy az elektron megváltozott rezgése két, mágneses erővonalak körül történő ellentetten körös rezgésből tehető össze. Ezek egyikének frequenciája az elektron saját frequenciájánál ν_0-nál egy kicsiny μ értékkel kisebb, másikáé ugyanennyivel nagyobb. E μ érték az elektron mozgásegyenletéből

$$\mu = \frac{1}{2c}\frac{e}{m}|H|$$

-nek adódik.

a) Vegyük fel most először azt, hogy a közeghez érkező, megvizsgálandó fény frequenciája észrevehetően különbözik a közeg elektronjainak frequenciáitól. Ez annyit jelent, hogy a spektrum ama részét vizsgáljuk, a hol abszorpciós vonal nincs. Ekkor, mivel a fény továbbítása az anyagi mediumokban az elektronok közvetítésével történik, ezért a közeghez érkező síkban poláros fény két ellentetten körös rezgésre bomlik, melyek a közegben gyengülés nélkül különböző terjedési sebességgel terjednek tova. E két körös rezgés a közegből való kilépés után ismét egy vonalmenti rezgéssé tevődik össze, melynek polározási síkja a két körös rezgés frequenciájának ($\nu_0+\mu$, $\nu_0-\mu$), tehát terjedési sebességének is különbözősége folytán a beeső fény polározás síkjához képest el van forgatva. Ez az a jelenség, a melyet FARADAY-féle jelenségnek szokás nevezni.

β) Ha azonban a spektrum abszorpciós vonalait, azaz oly beeső fényt vizsgálunk, a melynek frequenciájára egy elektronfaj rezonál, akkor miután μ igen kicsiny, azért a komplex törésmutatónak a jelen esetben érvényes, a (11) alatti mozgásegyenletekből és az (1) alatti MAXWELL-féle differenciálegyenletekből folyó formájában két oly tag lesz, a melyekben $\frac{h}{m}\nu$ a $\nu_0^2-\nu^2$-hoz képest el nem hanyagolható. Ebből következik, hogy az eredeti abszorpciós vonal helyébe két abszorpciós vonal lép, a melyek egyike az eredeti abszorpciós vonaltól jobbra és balra μ frequenciával van eltolva. Ezt a jelenséget az egyszerű *abszorpciós, longitudinális* ZEEMAN-effektusnak szokás nevezni.

2. A második főeset az, a mikor az elektromágnes sarkai között lévő elnyelő közeghez kívülről érkező fény a mágneses erővonalakra merőlegesen terjed tova.

Ez esetben az elektron rezgése három rezgésre oszlik, melyek egyike változatlan frequenciával, tehát ν_0 frequenciával az erővonalakkal parallel megy végbe, a másik kettő pedig ép úgy, miként a longitudinális effektusnál körben a mágnes erővonalak körül $\nu_0+\mu$, és $\nu_0-\mu$ frequenciákkal történik. A jelen esetben érvényes ϑ komplex törésmutató kifejezésében tehát három oly tag van, a melyekben az imaginárius tag a valós részhez képest el nem hanyagolható, minek következménye az, hogy minden abszorpciós vonal három abszorpciós vonalra oszlik. Ezt a jelenséget *egyszerű abszorpciós, tranzverzális* ZEEMAN-*féle* jelenségnek nevezzük.

Az abszorpciós ZEEMAN-féle effektusra vonatkozó eme eredményeket az emissziós ZEEMAN-féle jelenségre is átvihetjük ama reciprocitás alapján, mely abszorpció és emisszió között fennáll, s a melyet quantitative a KIRCHOFF-féle törvény fejez ki. A két jelenség közötti reciprocitást a következő egyszerű megfontolásokkal láthatjuk be.

Az elektronok a közegben a közeg hőmérséklete folytán állandó rezgésben vannak, s periódusok közelebb vagy távolabb esik saját frequenciájukhoz. De egy rezgő elektron elektromágneses energiát sugároz ki a térbe, a mely alkalmas viszonyok között, a test izzó állapotában mint hő és fényhullám vehető észre. Világos ezek után, hogy egy közeg azt a fényt fogja különös mértékben emittálni, a melynek freqenciájára elektronjai rezonálnak, azaz a melyet különös mértékben elnyel. Ez az a tény, a melyet quantitative az ismeretes KIRCHOFF-féle törvény fejez ki.

E KIRCHOFF-féle reciprocitási törvény alapján az abszorpciós ZEEMAN-féle effektusból most már a következő reciprok jelenségre következtethetünk:

Ha valamely fényforrás ν_0 frequenciájú fényt kibocsát, akkor ugyanez a fényforrás mágneses erőtérben az erőtér irányában kétszínű $\nu_0+\mu$ és $\nu_0-\mu$ frequenciájú ellentetten körben poláros fényt emittál, a mágneses erővonalakra merőleges irányban pedig háromszínű, $\nu_0+\mu$, ν_0 és $\nu_0-\mu$ frequenciájú fényt bocsát ki, a melyek közül a ν_0 frequenciájú az erővonalakra merőleges síkban, a $\nu_0+\mu$ és a $\nu_0-\mu$ frequenciájúak pedig az erővonalakkal parallel síkban polározottak. A spektrum szinképvonalai tehát longitudinális irányban két, tranzverzális irányban három vonalra oszlanak.

Ez a jelenség az *egyszerű, emissziós, longitudinális és tranzverzális* ZEEMAN-*féle effektus.*

Az összetett, a tranzverzális irányban háromnál több vonalból álló ZEEMAN-féle jelenségek magyarázatára az eddigi hipothézisek nem elégségesek. E jelenségek egymásra ható elektronok felvételét teszik szükségessé.

Ha ugyanis bizonyos színképvonal több, például m számú ugyanazon frequenciájú *egymásraható* elektronfajok rezgésének eredménye, akkor a $3m$ számú mozgásegyenlethez még bizonyos n számú feltételi egyenlet járul, úgy hogy összesen $r = 3m - n$ számú független egyenlettel rendelkezünk. Ezen r számú szabadsági foknak a mágneses erőtér jelenlétele alkalmával r számú különböző frequencia felel meg. Az elektronok rezgése tehát a mágneses erőtérben akként módosul, hogy r számú különböző frequenciájú rezgésből tehető össze. A spektralvonal tehát mágneses erőtérben r számú vonalra oszlik.

E jelenség további fejtegetésével nem óhajtok foglalkozni, miután, miként bevezető soraimban hangsúlyoztam, csak azt a szerepet óhajtom bemutatni, melyet az egyszerű elektron hipothézis (nem a modern atomisztikus feltevés) a fényelméletben betölt.

Rybár István.

SUBMIKRONOKBÓL ÁLLÓ KOLLOIDÁLIS ARANY-OLDATOK SZÍNÉRŐL.

A kolloidális aranyoldatok, mint ismeretes, igen különböző színűek lehetnek, értvén szín alatt a hydrosol színét átmenő fényben. Vannak rubin-vörös, violett és indigó színű oldatok és ezek között minden átmenet, továbbá kékes-zöld, kékes-fekete és szürkés-piszkoskék színű oldatok. A különféle szinek fellépését különböző módokon igyekeztek magyarázni. Az első észlelések[1] a különféle szinek és a szuszpendált részecskék nagysága között semmiféle összefüggést nem találtak. Felmerült tehát az a feltevés, hogy különböző színű aranyhydrosolok különböző modifikációban tartalmazzák az aranyat. Később F. Ehrenhaft[2] a különböző szineket rezonancia alapján igyekezett megmagyarázni. Részben azután Maxwell-Garnett[3] és végül G. Mie[4] elméleti kutatásai összeköttetésben W. Steubing[5] kísérleti vizsgálataival a kérdést lényegében tisztázták. G. Mie dolgozatában a következő kérdéssel foglalkozik: Legyen adva egy izolátor és beléágyazva egy vezetőből, pl. aranyból való golyó és haladjon elektromágneses síkhullám az izolátorban. Kérdés, hogy a golyó jelenléte következtében a golyón áthaladó hullám mennyit veszít energiájából? A kérdéssel, mint ismeretes, már

---

1 Pl. Kirchner és Zsigmondy R.

2 Ehrenhaft F., Wiener Sitz. Ber. II*a*. 112. p. 181. 1903. és 114. p. 1115. 1905.

3 I. C. Maxwell-Garnett, Phil. Trans. 203. p. 385. 1904. és 205., 237 1906.

4 G. Mie, Ann. d. Phys. 25. p. 377. 1908.

5 W. Steubing, Ann. d. Phys. 26. p. 329. 1908.

LORD RAYLEIGH is foglalkozott abban a speciális esetben, mikor a golyó vezetőképessége $\sigma = \infty$. G. MIE általánosan tárgyalja a kérdést, mikor a golyó anyagának vezetőképessége és dielektromos állandója véges értékkel birnak, mely értékek az ismert módon a golyó anyagának törésmutatójával és abszorpció állandójával vannak meghatározva. Kolloidális oldatoknál feltehető már most, ha csak a koncentráció nem nagyon nagy, hogy a részecskék, melyeket kicsiny golyóknak tekintünk, oly messze vannak egymástól, távolságuk oly nagy méretükhöz képest, hogy egymásra kölcsönösen nem hatnak. Ekkor az oldat abszorpciókoefficiensét megkapjuk, ha az egy golyó által okozott energiaveszteséget szorozzuk a térfogategységben lévő golyók számával. A golyók által okozott energiaveszteség két részből tevődik össze: egyrészt vezetőképességük folytán magukban a golyókban abszorbeálódik energia, másrészt a golyók által oldalt, diffuze kisugárzott energia is a beeső síkhullám energiájának rovására megy. A $\sigma = \infty$ feltevés elejtése feltétlenül szükséges volt. Ezen feltevés ellen szólt a közismert elméleti ellenvetésektől eltekintve az a tapasztalat is, hogy a különböző fémek igen finom eloszlású kolloidális oldatai különböző karakterisztikus színű diffuzsugárzást adtak, holott LORD RAYLEIGH feltevése alapján minden fém igen finom eloszlású kolloidális oldatának diffuz sugárzása ibolyakék színű, az átmenő fény színe pedig sárgásvörös. Hogy épen a legfinomabb eloszlású, submikronokból álló szuszpensiókra, hol tehát a szuszpendált részecskék nagyságrendje $10\mu\mu$ és ennél kisebb, a legkevésbé alkalmazható a $\sigma = \infty$ feltevés, az direkt kitűnik a vékony aranyrétegek vezetőképességére vonatkozó méréseimből. Ezen mérések[2] tanusága szerint a $10\mu\mu$ vastag réteg elektromos vezetőképessége már jóval kisebb a vastagabb aranyrétegek vezetőképességénél, a $3\mu\mu$ vastag réteg vezetőképessége pedig már zérus. Itt tehát nemhogy $\sigma = \infty$ volna, hanem épen a másik szélső eset forog fenn, mikor $\sigma = 0$. Evvel párhuza-

[1] POGÁNY, Ann. d. Phys. 49. 531. 1916.

mosan az abszorpcióállandó is a zérus felé tart, de $3\mu\mu$-nél, sőt még $1\mu\mu$-nél is zérustól különböző véges értéke van úgy, hogy az optikai állandókkal definiált dielektromos állandónak és vezetőképességnek egészen $1\mu\mu$-ig meghatározott, véges értéke van, mely azonban lényegesen különbözik a vastagabb rétegek értékétől.

Mie vizsgálatainak lényeges eredménye az, hogy igen kicsiny koncentráció mellett is különböző szinű lehet a kolloidális oldat a szerint, hogy mekkora a szuszpendált gömböcskék átmérője, 2ϱ. Az általa kiszámitott abszorpciógörbék szerint zérustól egész $2\varrho = 80\mu\mu$-ig az oldat rubinvörös, azután violett és végül indigo, majd feketéskék lesz. Ilyenképen tehát a kolloidális aranyoldatok különböző szinei egyszerű és szép magyarázatukat lelték. A Steubing által észlelt abszorpciógörbék nagyon jól egyeztek a Mie által számitott görbékkel. Volt azonban egy pont, mely továbbra is homályban maradt. Steubing ugyanis készitett submikronokból álló aranyhydrosolokat, melyek piszkos kékszinűek voltak, holott Mie szerint rubinvöröseknek kellett volna lenniök. Erre vonatkozólag megjegyzi Steubing: «Auf keine Weise wollte es aber glücken einwandfreie blaue Lösungen mit feinsten Teilchen zu erhalten. Alle erhaltenen Flüssigkeiten zeigten kein reines Indigo wie Hydrosole mit gröberer Verteilung, sondern ein mehr schmutziges blau oder stahlblau.»

Hogy ezt megmagyarázhassa R. Gans kiszámitotta kolloidális aranyoldatok abszorpciógörbéit oly feltevéssel, hogy a szuszpendált részecskék forgási ellipszoidok. Ezen számitásnál Gans arra az esetre szoritkozott, mikor ϱ kicsiny a fény hullámhosszához képest. A kis- és nagytengely viszonyának különböző értéke mellett kiszámitott abszorpciógörbék azt mutatták, hogy a rubinvörös oldatok részecskéinek alakja szükségképen alig térhet el a gömbalaktól, de egészen kicsiny részecskék is adnak kék szinnek megfelelő abszorpciógörbét, ha csak az ellipszoidok elég hosszúkásak. Azonban ezen abszorpciógörbéknek a spektrum sárga-vörös részében fekvő maximuma nagyon nagy, sokkal nagyobb, mint például a rubinvörös oldatok zöld abszorpciómaximuma és sokkal nagyobb, mint a durvább eloszlású, tiszta indigókék oldatok STEUBING által észlelt sárgavörös abszorpciómaximuma, úgy hogy ezen abszorpciógörbék még tisztább kék, illetve kékes-zöld szineknek felelnek meg.

A következőkben a submikronokból álló kolloidális aranyoldatok piszkos kék színének egy új magyarázatára fogok rámutatni. Ez a magyarázat egyszerűbb mint GANSÉ, mert az eredeti MIE-féle elmélet alapján áll, vagyis a legkisebb részecskéknek is gömbalakot tulajdonít és azonfelül a kiszámítandó abszorpciógörbék tényleg piszkos kék és piszkos zöld színnek felelnek meg.

Mint már említettem vékony aranyrétegek diszperziójára és abszorpciójára vonatkozó méréseim arra az eredményre vezettek, hogy a submikronok nagyságrendjével egyező vastagságú rétegekben az arany törésmutatója, n és abszorpciókoefficiense, k más értékűek, mint tömör arany esetében vagy vastagabb rétegekben. Közelfekvő már most a submikronokból álló hydrosolok abszorpciógörbéjének kiszámításánál ezeket az értékeket felhasználni a tömör arany értékei helyett. Ezen számítás céljából a már előbb nyert értékeimet még kék szinben végzett észlelésekkel kiegészítettem. Az adatok a következők:

A réteg vastagsága	$\lambda=450\,\mu\mu$		$\lambda=500\,\mu\mu$		$\lambda=600\,\mu\mu$		$\lambda=700\,\mu\mu$	
	n^2-k^2	$2nk$	n^2-k^2	$2nk$	n^2-k^2	$2nk$	n^2-k^2	$2nk$
1·0 $\mu\mu$	—	—	3·0	3·5	3.5	3·8	—	—
1·5 «	2·7	3·85	0·70	4·2	1·0	9·0	7·6	12·3
3·4 «	0·66	4·42	−0·90	4·45	−4·5	8·7	− 4·6	13·0
9·2 «	−0·70	4·87	−2·10	4·0	−7·7	4·4	−11·0	7·8
12·0 «	−0·85	4·75	−2·60	3·7	−8·5	4·0	−15·2	6·4
23·1 «	−1·28	4·35	−2·40	3·6	−8·0	3·8	−11·0	4·0
50·3 «	−1·15	4·40	−2·00	3·6	−6·4	4·0	− 8·0	3·7
113·2 «	—	—	−2·00	2·8	−6·1	1·7	− 6·6	1·0

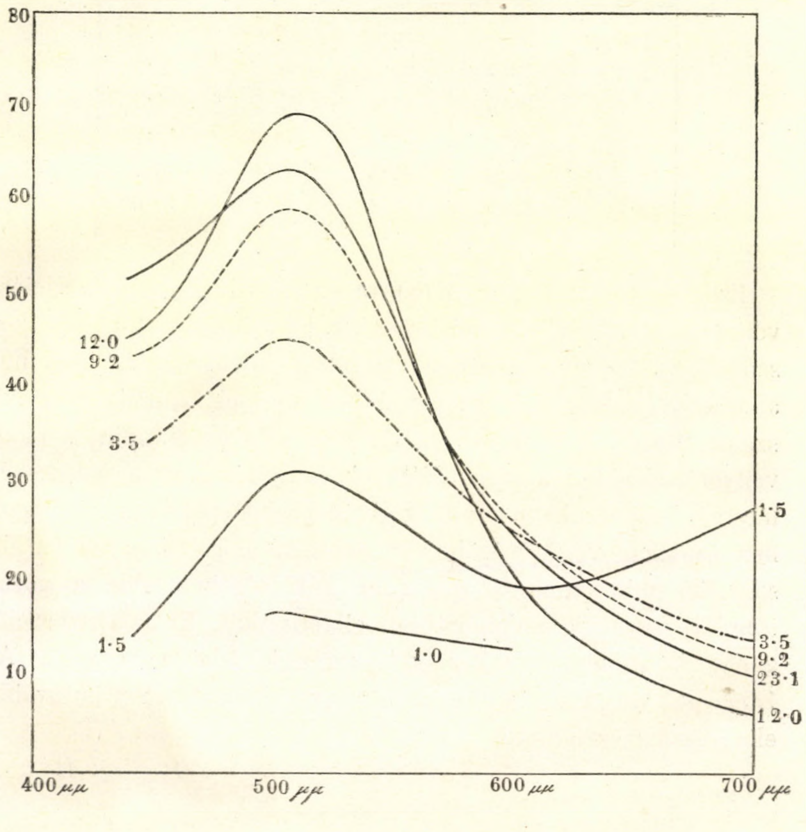
A számok levegőre vonatkoznak; λ jelenti a fény hullámhosszát, n^2-k^2 a komplex törésmutató valós, $2nk$ pedig az imaginarius részét. Látható, hogy a vékonyabb rétegek optikai állandói tetemesen különböznek a vastagabb rétegek és a tömör fém állandóitól, sőt a törésmutató valós része előjelét is változtatja. A legnagyobb eltérések ép oly rétegekben észlelhetők, melyeknek vastagsága a submikronok nagyságrendjével egyezik. A képlet, a melynek alapján a hydrosol abszorpciógörbéjét kiszámítjuk, a következő:

$$k_1 = C \,.\, K$$

$$K = \frac{6\pi}{\lambda'} Im.\left(\frac{n_0^2 - (n^2-k^2) + i2nk}{n_0^2 + (n^2-k^2) - i2nk}\right) \tag{1}$$

k_1 a hydrosol abszorpciókoefficiense, C a koncentráció, K a hydrosol abszorpciókoefficiense $C=1$ esetben. λ' a fény hullámhossza vízben mérve, n_0 a víz törésmutatója, n és k az arany optikai állandói. Az (1) alatti egyszerű formulát úgy nyerjük, ha Mie (100) képletéből csak az első tagot tartjuk meg. Ez meg van engedve, ha $2\varrho = 10$ vagy $20 \mu\mu$, a mi legjobban Mie dolgozatának 25. ábrájából itélhető meg. (1)-ben már nem szerepel ϱ explicite, úgy hogy K kiszámítása egyértelműen történhetik, bárhogyan dül is el a kérdés, hogy vajjon a gömböcskék sugarát, átmérőjét vagy pedig egy ezek között fekvő hosszúságot kell a rétegek vastagságával identifikálni. Ha már most az (1) képlet érvényességi intervallumában n és k független lenne a részecskék nagyságából, ha tehát ϱ implicite nem foglaltatnék (1)-ben, úgy azt mondhatnók, hogy ily finom eloszlás esetében k_1 független a részecskék nagyságától és a koncentrációval arányos. Már Mie kiemeli, hogy e tétel csak a részecskék nagyságának egy bizonyos alsó határáig lehet igaz, mert az aranyatomok optikailag bizonyára másként viselkednek, mint a tömör arany. Már most legalább is a gömböcskék átmérőjét kell a réteg vastagságával, D-vel identifikálni. n és k azonban már $D = 23{\cdot}1 \mu\mu$-nél tetemesen változnak, úgy hogy a részecskék nagyságának fent említett alsó határa körülbelül

$2\varrho = 23\mu\mu$ volna. Tekintetbe véve továbbá, hogy az 1) képlet az elhanyagolt tagok következtében csak $2\varrho = 10$ vagy $20\mu\mu$-ig



érvényes, azt kell mondanunk, hogy fenti tétel egyáltalában nem érvényes. Az 1) képlettel kiszámitott k_1 abszorpciókoefficiensek a következő táblázatban vannak összeállítva:

D $\mu\mu$	$\lambda=450$ $\mu\mu$	$\lambda=500$ $\mu\mu$	$\lambda=600$ $\mu\mu$	$\lambda=700$ $\mu\mu$
1·0 $\mu\mu$	—	16·6	13·0	—
1·5 «	16·2	31·4	19·6	27·1
3·4 «	35·0	44·8	25·0	14·5
9·2 «	44·8	58·9	26·6	12·7
12·0 «	46·9	67·5	21·0	6·7
23·1 «	52·9	62·4	24·5	10·6

Ezen számok 1 mm fényútra és $C = 10^{-6}$ koncentrációra vonatkoznak. K értékét tehát kapjuk, ha a fenti számokat 10^3-al szorozzuk. Az első oszlopban a réteg vastagsága áll, melynek állandóival a megfelelő sorban álló abszorpciókoefficienseket kiszámítottam. A hydrosol abszorpciókoefficiensei, mint λ függvényei a túloldali ábrában láthatók. Látható, hogy a részecskék nagyságának csökkenésével az abszorpció a spektrum kék végében csökken, vörös végében növekszik, míg 1·5$\mu\mu$-nél az abszorpció minimuma a spektrum kék végében van, a görbe többi része pedig meglehetősen ellaposodott. Ez az abszorpciógörbe körülbelül piszkos kék színnek felel már meg. Az 1,0$\mu\mu$-nek megfelelő görbe, sajnos nem teljes, de azon is további ellaposodás észlelhető.

Pogány Béla.

AZ ELEKTROMOS VEZETŐK LEGKISEBB ELLENÁLLÁSA.

Az OHM-féle törvény szerint az egymásután kapcsolt vezetők együttes ellenállása az egyes részek ellenállásának összegével egyenlő. Ha

$$q_1,\ q_2, \dots\ q_n$$

az egyes részek keresztmetszete,

$$l_1,\ l_2, \dots\ l_n$$

ezeknek a hossza és

$$\varrho_1,\ \varrho_2 \dots\ \varrho_n$$

a megfelelő fajellenállások, akkor az együttes ellenállás

$$R = \sum_1^n \varrho_i \frac{l_i}{q_i}.$$

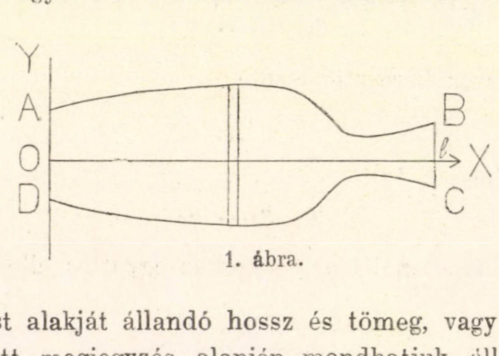
Ennek a mintájára fölírhatjuk a szabálytalan alakú vezető ellenállását meghatározó egyenletet is. Jelölje OX az elektromos áramlás irányát és $ABCD$ a szabálytalan vezető keresztmetszetét az Xy síkkal (1. ábra).

Messük a testet az OX tengelyre merőleges és egymáshoz olyan közel fekvő síkokkal, hogy két szomszédos síktól kivágott szeletnek keresztmetszetét változatlannak tekinthessük. Ha a szeleteket egymásután kapcsolt vezetőknek vesszük, akkor a szabálytalan alakú test ellenállása

$$r = \varrho \sum_1^n \frac{l_i}{q_i}, \tag{1}$$

mely egyenletben l_i az i-edik szelet vastagságát, q_i ennek keresztmetszetét és ϱ a homogén vezető fajellenállását jelenti.

Ha a testet állandó hossz és tömeg mellett deformáljuk, akkor ellenállása általánosságban megváltozik, mert az értéküket megtartó l_i mennyiségek mellett egyes q értékek megváltoznak. Föltesszük, hogy a deformácio alatt a testben nem lépnek föl oly sűrűségváltozások, melyek akár a térfogatot, akár pedig a fajellenállást megváltoztatni képesek volnának. Azt a kifejezésmódot, hogy a test ellenállása «általánosságban» megváltozik, azért használtuk, mert vannak deformációk, a melyek mellett az ellenállás értékét megtartja. Az utóbbi csoportba tartozó deformációk egyikét a következőkben alkalmazni is fogjuk.

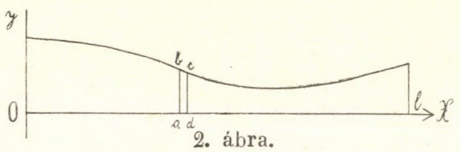


1. ábra.

Ha a test alakját állandó hossz és tömeg, vagy a mint azt az előbb tett megjegyzés alapján mondhatjuk, állandó hossz és térfogat mellett folytonosan változtatjuk, az elektromos ellenállás is megváltozik. A test elektromos ellenállásának eme változásával kapcsolatban fölvetjük azt a kérdést, hogy *milyen alak mellett legkisebb az ellenállás.* A fölvetett kérdésre a variációszámítással nyert megoldás adja meg a választ. A számítás tetemesen egyszerűsödik, ha a szabálytalan alakú testet, ellenállásának megváltozásával nem járó deformációkkal szabályos testté alakítjuk.

Az első ábrában feltüntetett testből emeljük ki az i-edik szeletet és helyettesítsük ugyanolyan anyagú és ugyanolyan vastagságú és ugyanakkora keresztmetszetterülettel biró körkoronggal oly módon, hogy ennek középpontja beleessék az x-tengelybe. Ha minden szeletet a megfelelő körkoronggal helyettesitjük, olyan forgási testet kapunk, melynek hossza, térfogata és ellenállása ugyanakkora, mint az adott szabálytalan testé, mert az 1. alatt álló egyenletben úgy ϱ, mint l_i és q_i értékek változatlanul megmaradtak. Ebből azután következik, hogy az állandó keresztmetszetű és egyenes vezető az ellenállás megváltozása nélkül deformálható körhengerré. Ezek alapján az általánosság csorbítása nélkül, két irányban tehetünk megszorításokat és pedig egyrészt azáltal, hogy a továbbiakban csakis forgási testek vizsgálatára szorítkozunk, másrészt azzal, hogy a deformációk sorából kizárjuk mindazokat, melyek a forgási testet ismét szabálytalan testté alakítanák. Ezekkel a megszorításokkal a föladat megoldása aránylag rövid számításokkal végezhető.

Jelölje ismét a derékszögű koordináta rendszerben OX az áramlás irányát (2. ábra) és egyben a forgási test tengelyét.



2. ábra.

Ha a testet két egymáshoz igen közel fekvő és az x tengelyre merőleges síkkal metsszük, akkor a kivágott igen vékony körkorong térfogata $\pi\,(ab)^2\,(ad) = \pi y^2 dx$ és az egész test térfogata.

$$v = \pi \int_0^l y^2 dx, \qquad (2)$$

hol l a test hossza. A test ellenállása pedig

$$r = \frac{1}{\pi}\varrho \int_0^l \frac{dx}{y^2},$$

mely egyenletben ϱ a test fajellenállása. Mind a két integrálban y valamely függvénye az x-nek. Ennek a függvénynek változtatásával általánosságban a két integrál is értéket változtat. Föladatunk értelmében a függvényt úgy kell megválasztanunk, hogy v értéke meghatározott állandó, r értéke pedig minimum legyen. Erre a függvényre mindkét integrál variációja 0, vagyis

$$\delta \int_0^l y^2 dx = 0, \tag{3}$$

$$\delta \int_0^l \frac{dx}{y^2} = 0 \tag{4}$$

Az y függvény variációjával a test — noha alakját megváltoztatja — mégis forgási test marad, mert mindkét integrálban keresztmetszetként a kör szerepel. A függvény variációjával tehát a forgási test ismét forgási testté deformálódik. Szorozzuk a 4 alatt álló egyenletet valamely utóbb meghatározandó a állandónak negyedik hatványával és adjuk a szorzatot a 3 alatt álló integrálhoz, akkor

$$\delta \int_0^l \left(y^2 + \frac{a^4}{y^2}\right) dx = 0.$$

A bevezetett állandót azért választottuk a-nak negyedik hatványával egyenlőnek, mert ezzel a egyszerű geometriai jelentőséget kap. Mivel l állandó, az integrál variáciáója a következő egyenletre vezet

$$2\int_0^l \left(y - \frac{a^4}{y^3}\right) \delta y dx = 0.$$

Ez az integrál δy-nak bármely értéke mellett csak úgy lehet 0, ha

$$y - \frac{a^4}{y^3} = \frac{y^4 - a^4}{y^3} = 0,$$

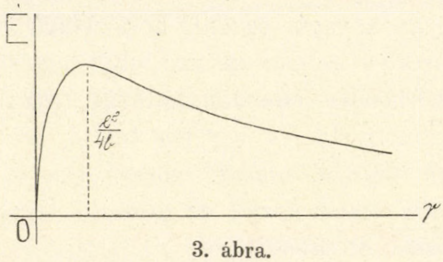
a mi valós és véges értékek mellett csak úgy lehetséges, ha $y = \pm a$. Ez egy az x tengelylyel parallel egyenes egyenlete és az ennek megfelelő forgási test a henger. Az a állandónak értékét meghatározza a 2 alatt álló egyenlet. Egyszerű számítással meggyőződhetünk arról, hogy az $y = \pm a$ függvényre a szóban forgó integrálnak második variációja pozitiv.

Az ugyanolyan anyagú, egyenlő hosszúságú és térfogatú forgási testek között a hengernek van tehát legkisebb ellenállása. De mivel a körhenger ellenállásváltozás nélkül deformálható állandó keresztmetszetű és egyenes testté, mondhatjuk, hogy *az ugyanolyan anyagú, egyenlő hosszúságú és térfogatú, de különböző alakú testek között az állandó keresztmetszetű vezetőknek legkisebb az ellenállása.*

Ha az említett vezetőt bekapcsoljuk egy stacionär áramforrás két sarka közé, akkor a deformálás alatt a vezető másodperczenkénti energiafogyasztása, vagyis az áramnak a vezetőben kifejtett effektusa is változik. Ha a bekapcsolt vezető igen nagy ellenállású és a deformácio a nagyobb keresztmetszetű helyekről a kisebb keresztmetszetűek felé szorítja a tömeget, akkor a csökkenő ellenállással az energiafogyasztás fokozatosan növekszik és elér egy szélső értéket abban az esetben, ha a vezető legkisebb ellenállása nagyobb vagy legföljebb egyenlő az áramforrás belső ellenállásával. De ha a vezető legkisebb ellenállása kisebb, mint az áramforrás belső ellenállása, akkor az említett deformácio alatt az effektus előbb közeledik egy maximális érték felé, azután a csökkenő r-rel együtt az effektus is csökken. Az áramnak az r ellenállású vezetőben kifejtett effektusa

$$E = \frac{re^2}{(r+b)^2}.$$

Ebben az egyenletben e az áramforrás elektromótoros ereje, b annak belsőellenállása. Ha egy derékszögű koordináta rendszer vízszintes tengelyére fölrakjuk r-nek, a külső ellenállásnak zérustól végtelenig terjedő összes értékeit, ordinátákul pedig az r-nek megfelelő E értékeket, akkor a 3-dik ábrában feltüntetett görbét kapjuk. A görbe alakja mutatja, hogy a külső ellenállásnak növekedésével az áram effektusa $r = b$-nél maximumot ér el, a mely értéktől növekedő r-ek mellett fokozatosan csökken. Ha tehát a deformálandó vezető legkisebb ellen-



3. ábra.

állása kisebb b-nél, akkor a csökkenő r felé deformált vezetőben az áram effektusa $r = b$-nél tényleg maximális értéket vesz föl.

Gruber Nándor.

PHYSIKAI SZEMLE.

A. Einstein: Az általános relativitás elméletének alapvonalai. (Annalen der Physik. 49. kötet. 769—823 oldal, 1916. év.)[1]

EINSTEIN ezen dolgozatában összefoglalja azon kutatásainak eredményét, melyeket a gravitacio jelenségének a relativitás elméletének gondolatkörébe való szerves beillesztése czéljából folytatott. Mivel a már közismert relativitáselméleten kívül semmi speciális ismeretet, úgy saját régibb dolgozatait sem tételezi fel, egyúttal igen alkalmas arra, hogy az elméletbe bevezetésül szolgáljon.

E rövid referatumban csak az elmélet nehány alapgondolatának általános jellemzésére szorítkozom.

1. A kiindulási pont: az aequivalencia elve.

Egy tömegpont homogen (azaz irány és nagyság szerint állandó) gravitációs mezőben állandó gyorsulással mozog egy oly koordinátarendszerben, melyben a klasszikus mechanika NEWTON-féle alaptörvényei érvényesek (inerciarendszer). A gyorsulás független a tömegpont anyagi minőségétől. Ezen tulajdonság által a gravitációs mező élesen különbözik más erőterektől, például az elektromos mezőtől.

Másrészt a tömegpont ugyanazon mozgást fogja végezni az esetben, ha gravitációs mező nincs jelen, de a mozgást egy oly koordinátarendszerre vonatkoztatjuk, mely az eredeti inerciarendszerben állandó gyorsulással translációban van, midőn a gyorsulás nagysága megegyezik a gravitációs tér gyorsulásával, iránya pedig épen ellenkező. A mozgás itt is független lesz a tömegpont anyagi minőségétől. Röviden szólva: *homogen gravitációs mező aequivalens egy gyorsuló koordináta-*

---

[1] Külön is megjelent. EINSTEIN elméletébe bevezetésül szolgálhat E. FREUNDLICH: Die Grundlage der Einsteinschen Gravitationstheorie 1916 J. SPRINGER, Berlin. Különlenyomat a «Die Naturwissenschaft» 1910. évfolyamából.

rendszerre vonatkoztatott térrel. EINSTEIN ezen æquivalenciának még lényegesen új fizikai tartalmat ad azáltal, hogy felteszi azt, hogy az üres térben végbemenő elektromágneses folyamatokra is kiterjed érvénye és így kibővítve az *aequivalencia elvének* nevezi. Már most is fontos következtetéseket vonhatunk ezen elvből. Ugyanis, ha az æquivalencia általános érvényű, úgy egy fénysugár gravitációs mezőben hajítási parabolát fog leírni, mert gyorsuló koordinátarendszerben az állandó sebességgel terjedő fénysugár pályája parabola. Mivel EINSTEIN számítása szerint a napfelület mellett elhaladó fénysugár 1,7″ elhajlítást szenved, esetleg lehetséges lesz az elmélet ezen következtetését tapasztalatilag ellenőrizni.

Egy inhomogen, térbelileg változó gravitációs mező nem helyettesíthető véges darabon egy gyorsuló koordinátarendszerre vonatkoztatott térrel. De az æquivalencia elve bizonyos általánosításokra utal, melyek azután a gravitációs mező eredeti és egész általános felfogására vezettek.

2. *A relativitás elvének általánosítása.*

A relativitás elmélete módot nyújt arra, hogy az egy koordinátarendszerben megadott fizikai mennyiségeket, mint hosszúságokat, időtartamokat, elektromos és mágneses térerősségeket, egy más, az eredeti koordinátarendszerben egyenletes translációt végző koordinátarendszerben is megadjuk.

Azonkívül az alaptörvényeket, mint például az elektrodinamika alapegyenleteit stb. minden ily koordinátarendszerre érvényes alakban fejezi ki.

Az æquivalencia elve közelfekvővé teszi azon kérdést, hogy a fizikai mennyiségek átszámítása hogyan történik egymáshoz képest gyorsuló koordinátarendszerekre, vagy még általánosabban bárminő, tehát deformálódó koordinátarendszerekre is és hogyan fejezhetők ki az alaptörvények tetszésszerinti koordinátarendszerekben.

3. *A vektorfogalom általánosítása.*

Itt is úgy, mint az általános relativitáselméletben [1] a vektorfogalom általánosítása vezet czélhoz. A relativitáselméletben négyes vektornak

---

[1] LAUE: Relativitätstheorie. 2. kiadás 66. oldal.

oly négy mennyiségből álló egy (x_1, x_2, x_3, x_4) koordinátarendszerben értelmezett értékrendszert (A_1, A_2, A_3, A_4) nevezünk, melynek megfelelő komponenseit egy (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) koordinátarendszerben, melyet az eredetiből lineáris orthogonális transformácio (LORENTZ-transformácio)

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \qquad (1)$$
$$i = 1, 2, 3, 4,$$

által nyerünk, hol

$$\sum_1^4 {}^i a_{li} a_{ki} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \; ha \; \begin{matrix} l \neq k \\ l = k \end{matrix},$$

a következő képletek adják meg:

$$A'_i = a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + a_{i3}A_3 + a_{i4}A_4 \qquad (2)$$
$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Most nem szorítkozunk lineáris transformációra, hanem egész általánosan $(x_1x_2x_3x_4)$ koordináták helyébe bárminő négy parametert $(x'_1x'_2x'_3x'_4)$ vezetünk be (melyekről csak felteszszük, hogy bizonyos folytonossági és egyértéküségi követelményeket kielégítenek)

$$x_i = x_i\,(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (3)$$
$$(i = 1, \ldots 4).$$

Az új koordináták differenciáljai a régiekével lineárisan fejezhetők ki

$$dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x'_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x'_i}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial x'_i}{\partial x_4} dx_4. \qquad (4)$$

Általánosan «kontravariáns» négyesvektornak oly négy mennyiségből álló értékrendszert (A^1, A^2, A^3, A^4) nevez, melyek épúgy transformálódnak, mint a koordináták differenciáljai

$$A^{i'} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_1} A^1 + \frac{\partial x'_i}{\partial x_2} A^2 + \frac{\partial x'_i}{\partial x_3} A^3 + \frac{\partial x'_i}{\partial x_4} A^4. \qquad (5)$$

«Kovariáns» négyesvektor pedig a következő transformációs formulák által definiált értékrendszer

$$A_i = \frac{\partial x_1}{\partial x'_i} A_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_i} A_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_i} A_3 + \frac{\partial x_4}{\partial x'_i} A_4. \qquad (6)$$

Hasonlókép definiálhatók a magasabbrendű vektorok, úgynevezett tensorok. Igy például egy másodrendű kovariáns tensort akkor képez a tizenhat $A_{\mu\nu}$ mennyiség, ha transformáció-törvényét a következő képlet adja:

$$A'_{\mu\nu} = \sum_{1}^{4}{}^{i} \sum_{1}^{4}{}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_k}{\partial x'_\nu} A_{ik} \tag{7}$$

$$\mu. \ \nu = 1, 2, 3, 4.$$

A vektoranalizis operacióit, mint vektori és skaláris szorzatot azután a differenciáloperaciókat, mint a gradiens, divergencia, rotacio etc. fogalmait megfelelően általánosítva egész általános vektoranalizist építhetünk fel. Mindezen fogalmak azon esetben, ha csak Lorentz-transformációt engedélyezünk az ismert vektorfogalmakkal és operációkkal lesznek azonosak.

4. *A fizikai alaptörvények általánositásai.*

A fizikai alaptörvényeket a speciális koordinátarendszer választásától független módon úgy fejezzük ki, hogy vektoregyenleteket írunk, melyeket a relativitáselmélet megfelelő egyenleteiből (hypothetikusan) úgy nyerünk, hogy a speciális vektor tensor, vektoroperáció helyébe a megfelelő általános fogalmat helyezzük.

5. *Az «ívelem» invarianciája, a tér-idő sokaság szerkezete.*

A mint ismeretes relativitás-elméletében fontos szerepet játszik a következő, Lorentz-transformációval szemben invariáns kifejezés.[1]

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 \tag{8}$$

a négydimensiós idő-tér sokaság két szomszédos pontjához tartozó ívelem négyzete.

Ezen kifejezés a (3) transformációval szemben nem invariáns. Einstein kiköti azonban, hogy a következő általánosabb kifejezés

$$ds^2 = \sum_{1}^{4}{}^{\mu} \sum_{1}^{4}{}^{\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{9}$$

hol a $g_{\mu\nu}$-k a koordináták függvényei a koordinátarendszer választásától független legyen, a mivel a minden koordinátarendszerhez tartozó

[1] Laue. l. c. 55., 58. oldal.

mértékegységet állapítja meg. A (9) kifejezés általában egy négy dimenziós nem-euklidesi tér ívelemét is megadja, azaz oly terét, melyet úgy foghatunk fel, mint egy négydimensiós általában változó görbülettel biró felületet az 5 dimenziós térben. Ha a tér euklidesi, úgy a $g_{\mu\nu}$-k közt relációk állanak fenn és a koordinátarendszer kellő választásával (9) kifejezés a (8) kifejezés alakjára hozható.

Az ívelem együtthatói, a $g_{\mu\nu}$-k a sokaság geometriai természetét határozzák meg.

Einstein *felteszi, hogy a fizikai idő-tér sokaság egy általában változó görbülettel biró nem-euklidesi sokaság. A sokaság geometriai természetének befolyása a fizikai jelenségekre, például egy tömegpont mozgására, a gravitációs mezőben nyilvánul.* A sokaság geometriai szerkezete persze függ a jelenlevő anyagi rendszerektől. Egy durva hasonlat talán megvilágíthatja az itt fellépő viszonyokat. Gondoljunk egy deformálható felületen mozgó golyó mozgására. A golyó mozgása függ a felület alakjától, másrészt ezen alakot is befolyásolja a golyó helyzete és mozgása. (Szem előtt tartandó azonban, hogy Einsteinnél eltérően példánktól mindig idő-tér sokaságról van szó!)

6. A tétlenség elvének általánosítása.

A pont mozgása e sokaságban úgy történik — a tétlenség elvének közelfekvő általánosítása — hogy a pálya nem egyenes, hanem geodetikai görbe. A pont mozgását tehát a geodetikai görbék differenciálegyenletei határozzák meg:

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} = \sum_1^4 {}_{\mu,\nu} \Gamma^\tau_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}, \tag{10}$$

$$\tau = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Itt $\Gamma^\tau_{\mu\nu}$ a Christoffel-féle három indexes symbolum

$$-\Gamma^\tau_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \sum {}_\alpha g^{\tau\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right), \tag{11}$$

hol $g^{\tau\alpha}$ az ívelem (9) kifejezése együtthatóiból képezhető matrix:

$$\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{Vmatrix}$$

$g_{\tau\alpha}$ eleméhez tartozó aldetermináns osztva a matrix determinánsával $g = |g_{\mu\nu}|$-vel. A $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$-k a sokaság geometriai alakjának befolyását a pont mozgására fejezik ki és ezért Einstein a gravitációs mező komponenseinek nevezi őket.

7. *A gravitaciós mező alapegyenletei.*

A gravitációs mező meghatározására az anyagi rendszerek elosztásával Einstein a Laplace Poisson-féle egyenletet

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho, \tag{12}$$

általánosítja, hol φ a gravitációs potenciál, ρ a sűrűség.

Az általánosítás alapgondolata következő. Már a speciális relativitáselmélet nem tekinti a tömeget (sűrűséget) önálló alapfogalomnak, hanem energiára vezeti vissza, a mely mint az energia tensor[1] $T_{\mu\nu}$ komponense szerepel.

A sűrűség helyébe az energia tensor $T_{\mu\nu}$ komponenseit írjuk. A másik oldalon, mivel csak vektoregyenletek jöhetnek számba, szintén csak egy másodrendű tensor komponensei állhatnak és mivel a gravitációs mező a tér geometriájától függ, csak oly tensor, mely szintén csak a $g_{\mu\nu}$-ktől függ. Ilyen másodrendű tensor csak kettő van, az egyiket maguk az ívelem együtthatói a $g_{\mu\nu}$-k képezik, a másik pedig a Riemann-Christoffel-féle tensor:

$$B_{\mu\nu} = \sum_{1}^{4}{}_{\tau,\alpha}\left[-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\begin{Bmatrix}\mu\nu \\ \tau\end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{Bmatrix}\mu\tau \\ \tau\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\nu \\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\tau \\ \tau\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\tau \\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\nu \\ \tau\end{Bmatrix}\right] \tag{13}$$

$$\mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Az egyenletekre legközelfekvőbb és legegyszerűbb feltevés lesz, hogy e három tensor komponensei közt lineáris relációk állanak fel azaz az egyenletek a következők:

[1] Laue. l. c. 94., 182. oldal.

$$B_{\mu\nu} = -\varkappa\,(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \qquad (14)$$
$$\mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

hol T skalaris az energiatensor által meghatározott skalaris és $\varkappa$ gravitációs állandóval függ össze. Természetesen e közelfekvő, de azért mégis önkényes választást csak az egyenletből vont következtetések termékenysége igazolhatja.

Az (14) egyenletekből következik, hogy az impulsus-energiatétel[1] gravitációs mezők esetében is fennáll a mi ezen egyenletek legerősebb támaszai közé tartozik. Azonkívül, mint határesetet magukba foglalják a Poisson-féle egyenletet és így a Newton-féle gravitációs törvényt azon esetben, ha az ívelem csak kissé tér el a (8) alatti kifejezettől, azaz a $g_{\mu\nu}$-k csak kissé különböznek a

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$$

értékektől.

Ha az eltéréseket pontosabban számba veszszük, nagyobb eltérésekhez jutunk a Newton-féle törvénytől, melyek a Merkur mozgása esetében minden további feltevés nélkül e bolygó eddig kielégítően nem értelmezett perihelium mozgását, a mi egy évszázad alatt 43″-t tesz ki, numerikusan megadják.

Az elmélet a fénysugarak görbülését gravitációs mezőben követeli, a mire a bevezetésben hivatkoztam. Ugyanis itt is mint a speciális relativitás elméletben a fénysugarak útját

$$ds^2 = 0$$

egyenlet határozza meg, a melyek nem lineáris sokaságuk esetében bizonyos görbe vonalak.

Másik következmény az, hogy egy fényforrás frequenciája megváltozik gravitációs térben. Ezen hatással igyekezett Freundlich egyes állócsillagok spektrumvonalainak eltolódását értelmezni, de eredményei még további igazolásra szorulnak.

Az elmélet nehézség nélkül megadja a fizikai alaptörvények, például a

[1] Laue. l. c. 95., 183. oldal.

MAXWELL-féle egyenletek alakját, általánosan invariáns alakban. Mivel az elektromágneses mező is hozzájárul az energia tensorhoz, az elektromágneses mező gravitációs mezőt létesít a (14) egyenlet értelmében. Az általánosított MAXWELL-féle egyenletek a (14) rendszerrel együtt a gravitáció befolyását elektromágneses folyamatokra általánosan megadják. Hogy az így kiegészített elektrodinamika alapján sikerülni fog-e kielégítő atom-modellt konstruálni újabb mellékhipothesisek nélkül, az nyilt kérdés.

Kétségtelen, hogy eddig az elmélet nem nagyon számos tapasztalatilag ellenőrizhető következtetésre vezetett. De másrészt gondolatmenetei oly eredetiek, oly távolálló jelenségeket hoz szoros kapcsolatba, ismert törvényeket oly meglepő világításban mutat be, a hipothesis képzésnek lényegesen új útjait és oly lehetőségeket mutat be, hogy érdeklődésre akkor is számot tarthat, ha talán tartalma lényeges módosításra is fog szorulni.

Budapest, 1916 augusztus.

Ortvay Rudolf.

Hilbert Dávid: A fizika alapelvei. *(Első közlemény.)* (Nachrichten von der Königl. Gesell. d. Wissenschaften zu Göttingen. 1915. 395—407. oldal.)

HILBERT nehány egyszerű feltevés alapján levezeti a gravitációs és elektromágneses mező alapegyenleteit.

Jelöljék [1] x_1, x_2, x_3, x_4 a tér-idő sokaság egy pontjának koordinátáit, legyen $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$) egy symmetrikus másodrendű kovariáns tensor 10 komponense,[1] $q_1 q_2 q_3 q_4$ az elektromágneses négyes potenciál komponensei és H a következő argumentumok függvénye:

$$g_{\mu\nu},\ g_{\mu\nu l} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_l},\ g_{\mu\nu lk} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_l \partial x_k},\ q_s,\ q_{sl} = \frac{\partial q_s}{\partial x_l}$$

$$(\mu,\ \nu,\ l,\ k,\ s = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

és $g = |g_{\mu\nu}|$

$$d\omega = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

A fizikai (gravitációs és elektromágneses) jelenségek lefolyását a következő feltétel szabja meg (I-ső Axioma):

---

[1] A jelölések megegyeznek az előbbi referátum jelöléseivel.

$$\int H \sqrt{g}\, d\omega$$

integrál variációi képezve a $g_{\mu\nu}$, q_s potenciálokra eltünnek.

A II-ik Axioma az általános relativitás elvét fejezi ki:

Legyen H az x_i koordinátáh bárminő transformációjával szemben invariáns. A variácio probléma LAGRANGE-féle egyenletei szolgáltatják a gravitációs és elektromágneses mező alapegyenleteit.

Az energia tensor definiciója után levezethető az impulsusenergia tétele.

Azonban úgy az alapegyenletek, mint az energia fogalma határozatlanságot tartalmaznak, a mennyiben I. és II axioma nem határozzák egyértelműen meg.

H-t úgy választja HILBERT, hogy az alapegyenletek lehetőleg egyszerűek legyenek és nevezetesen a gravitációs mező alapegyenletei ne tartalmazzák a $g_{\mu\nu}$-k másodiknál magasabb differenciálhányadosait.

Tekintetbe véve az invariánsok felépítését bizonyos egyszerűbb invariánsokból H következő alakjára jut:

$$H = L + \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} B_{\mu\nu},$$

hol $B_{\mu\nu}$ a RIEMANN CHRISTOFFEL-féle tensor (lásd az előbbi referatumot (13)) és L csupán $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}$, q_s, q_{sl} függvénye.

Feltéve, hogy L nem függ $g_l^{\mu\nu}$-től, úgy csak négy általános invariánstól függhet.

A két legegyszerűbbre szorítkozva:

$$Q = \sum_{k,l,m,n} (q_{nm} - q_{mn})(q_{lk} - q_{kl})\, g^{mk} g^{nl}$$

$$q = \sum_{k,l} q_k q_l g^{kl}$$

L-et a következő egyszerü alakúnak veszi fel:

$$L = \alpha Q + \beta q^3,$$

hol α, β állandók.

L ezen választásánál HILBERT elmélete MIE[2] általánosított elektrodinamikáját is magában foglalja.

Ortvay Rudolf.

---

[1] G. MIE.: Ann. d. Phys. 1912. 37. kötet, 511. oldal.
39. « 1. «
1913. 40. « 1. «

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K, A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

25. évfolyam. 1916. nov.—decz. 7—8. füzet.

FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK MEGKÖZELÍTÉSE ADOTT FÜGGVÉNYSOROZATBÓL KÉPEZETT LINEÁRIS KIFEJEZÉSEKKEL.

Bevezetés.

Ismeretes a következő WEIERSTRASS-tól eredő tétel: bármely az $a \leqq x \leqq b$ véges intervallumban[1] folytonos függvény ezen intervallumban raczionális egész függvényekkel tetszésszerinti kis hibával egyenletesen megközelithető. Ezt úgy szokás kifejezni, hogy az

$$1, x, x^2, \ldots, x^\nu, \ldots$$

hatványsorozat a folytonos függvények egy *bázisa* az (a, b) intervallumban.

Szorítkozzunk egyelőre a (0, 1) intervallumra. Tudtommal S. BERNSTEIN[2] foglalkozott először azzal a kérdéssel, hogy a positív hatványok egy sorozata

$$x^{p_0}, x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots, x^{p_\nu}, \ldots \quad (p_0 = 0)^3 \tag{1}$$

mikor bázisa a folytonos függvényeknek a (0, 1) intervallum-

[1] A következőkben ezen intervallumot röviden (a, b)-vel jelöljük.

[2] S. BERNSTEIN, *a)* Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes [Proceedings of the fifth international congress of mathematicians (Cambridge, 22—28 August 1912), Cambridge, 1913, Vol. I, p. 256—266], 264. o. — *b)* Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné (Mémoires publiés par la Classe des sciences de l'Académie Royale de Belgique, 4°, II. série, t. IV, 1912, 104 o.]

[3] Nyilván szükséges, hógy a zérus kitevő előforduljon, mert különben már az $f(x) \equiv 1$ függvény az $x = 0$ helyen nem volna tetszésszerinti kis hibával megközelithető.

ban. Ő erre egyrészt elegendő, másrészt szükséges[1] feltételeket vezetett le és ezek kapcsán azt a kérdést vetette fel, hogy a $\sum \frac{1}{p_\nu}$ sor széttartása nem *szükséges és elegendő* feltétele-e annak, hogy az (1) sorozat bázis legyen[2] a (0, 1) intervallumban.[3] MÜNTZ-nek[4] sikerült bebizonyítania, hogy a

---

[1] A legáltalánosabb szükséges feltétel, a melyet BERNSTEIN (i. h. 83—84. o.) levezetett, a következő:

Nem szabad léteznie oly pozitiv számokból álló

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots,$$

sorozatnak, hogy a

$$\sum_1^\infty{}^\nu \delta_\nu \quad \text{és} \quad \sum_1^\infty{}^\nu e^{-p_\nu \delta_\nu}$$

sorok egyidejűleg összetartsanak.

Könnyen kimutatható, hogy e feltétel a következő egyszerűbbel egyértelmű: legyen

$$U_\nu = \begin{cases} 1, & \text{ha } p_\nu \leqq 1, \\ \dfrac{1+\log p_\nu}{p_\nu}, & \text{ha } p_\nu > 1, \end{cases}$$

akkor kell, hogy a $\sum_1^\infty{}^\nu U_\nu$ sor széttartson.

Ugyanis BERNSTEIN feltétele így is fogalmazható:

kell, hogy a $\sum_1^\infty{}^\nu (\delta_\nu + e^{-p_\nu \delta_\nu})$ sor bármily δ_ν értékekre széttartson.

De könnyen igazolható, hogy mindenkor

$$U_\nu \leqq \delta_\nu + e^{-p_\nu \delta_\nu},$$

és *van* oly δ_ν érték, a melyre itt az egyenlőség jele érvényes; innen állításunk helyessége közvetlenül folyik.

[2] Értem ez alatt a következőkben is: a folytonos függvények bázisa.

[3] E. SCHMIDT és RIESZ F. a következő általánosabb kérdést vizsgálták: adva lévén az (a, b) intervallumban definiált valós folytonos függvények egy végtelen sorozata: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$, minő feltételek mellett közelíthető meg egyenletesen bármely az (a, b) intervallumban definiált folytonos függvény a φ_ν-k lineáris aggregatumaival? V. ö. SCHMIDT, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Dissert. Göttingen [Mathematische Annalen Bd. 63, 1907, S. 433—476]. — RIESZ, *a)* Sur une espèce de Géometrie analytique des systèmes de fonctions sommables [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Acad. des Sciences, Paris, t. 144, 1907, p. 1409—1411]. — *b)* Sur certains systèmes d'équations fonctionelles et l'approximation des fonctions continues [Ibidem, t. 150 1910, p. 674—677], 677. o. — *c)* Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales [Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, T. 28, 3° Série, 1911, p. 33—62], 51—54. o.

[4] CH. H. MÜNTZ, Über den Approximationssatz von WEIERSTRASS [Ma-

felelet igenlő, ha még feltesszük, hogy a kitevők sorozata folyton nő, a mely feltevés könnyen volt pótolható eme általánosabbal: $\underline{\lim}_{\nu=\infty} p_\nu > 0$.

Alkalmam volt MÜNTZ dolgozatát kéziratban olvasnom s hozzá levelezés útján néhány megjegyzést fűznöm. De az ő bebizonyítása még nem éri el az egyszerűség és áttekinthetőség ama fokát, a mely nézetem szerint elérhető. Ugyanis teljesen kiküszöbölhető úgy a végtelen lineár egyenletrendszerekre vonatkozó SCHMIDT-féle eredmények, valamint a FOURIER-féle sorfejtések alkalmazása. Újabban még észrevettem, hogy a vizsgálat minden nehézség nélkül kiterjeszthető oly komplex értékű kitevőkre, melyeknek valós része positiv és hogy meggondolásunk a $\underline{\lim}_{\nu=\infty} R(p_\nu) = 0$ esetben is némi eredményre vezet.

Világos ugyanis, hogy WEIERSTRASS tétele az x valós változó komplex függvényeire is érvényes, mert ha $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, a hol $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ valós folytonos függvények, akkor $f(x)$ megközelítésére csak a $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ függvényeket kell megközelítenünk; természetesen $f(x)$ közelítő polynomja most komplex együtthatókkal bir.

Ennek általánosításaképen a következő tételt fogjuk bebizonyítani:

---

them. Abhandlungen H. A. SCHWARZ gewidmet. Berlin, 1914, S. 303—312]. Ugyanitt található irodalmi tájékoztatás, melyet még a következővel egészitek ki: FEJÉR L., A LAPLACE-féle sorokról [Mathematikai és Természettudományi Értesítő, 26. k. 1908, 323—373. o.], 347. és 353—355. o. — Itt idézem még RIESZ F. dolgozatát: Über die Approximation einer Funktion durch Polynome [Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 17. Bd., 1908, S. 196—211], továbbá a következőket: G. FABER, Über stets konvergente Interpolationsformeln [Ibidem, 19. Bd. 1910, S. 142—146], 143—144. o. — CH.-I. DE LA VALLÉE POUSSIN, Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de FOURIER [Académie Royale de Belgique. Bulletin de la classe des sciences. Bruxelles. 8°, 1908, p. 193—254]. Cours d'analyse infinitésimale, T. II, deuxième édition (1912) p. 126—137. — I. MOLLERUP, Über die Darstellung einer beliebigen stetigen Funktion [Mathem. Annalem, 66 (1909), S. 511—516]; Berichtigung zu meinem Aufsatz: «Darstellung beliebiger stetiger Functionen» [Math. Ann. 71 (1912), S. 600]. — H. LEBESGUE: Sur les intégrales singulières, [Ann. de Toulouse III. sér., t. I. 1909, p. 25—117].

I. *Tétel. Ahhoz, hogy az*

$$x^{p_0} = x^0 = 1,\ x^{p_1},\ x^{p_2}, \dots,\ x^{p_\nu}, \dots \tag{2}$$

sorozat, a hol

$$p_\nu \neq p_\mu,\ \text{ha}\ \nu \neq \mu;\ R(p_\nu) > 0, \tag{3}$$

a folytonos függvények bázisa legyen a (0, 1) *számközben a* $\sum_1^\infty \nu \frac{1+R(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2}$ *sor széttartása szükséges és a* $\sum_1^\infty \nu \frac{R(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2}$ *sor széttartása elegendő feltétel.*[1]

Az 1. §-ban egy régóta ismeretes determinánstételt idézek; a 2. §-ban a folytonos függvényeknek «középértékben» való megközelítését vizsgálom; a 3. §-ban bebizonyítom az I. tételt. A 4. §-ban a trigonometrikus függvényekkel való megközelítést vizsgálom; már az I. tétel is szolgáltat eredményt e kérdésre vonatkozólag. Egy másik út további eredményekre vezet, melyek közül kiemelem a következőt:

II. *Tétel. Az*

$$1,\ c_1 \sin \varrho_\nu x - c_2 \cos \varrho_\nu x\ \ (\nu=1, 2, 3, \dots),\ \ \varrho_\nu \neq \varrho_\mu \neq 0$$

sorozat, a hol c_1, c_2 *el nem tünő állandók, bázisa a folytonos függvényeknek bármely* (a, d) *számközben, ha csak a* $\sum_1^\infty \nu \frac{1}{|\varrho_\nu|^{1+\delta}}$ *sor* δ *valamely positiv értékére széttartó. Ha a* c_1, c_2 *számok egyike eltűnik, úgy fel kell tenni, hogy* $a \geqq 0$. A ϱ_ν-k *komplex* számok is lehetnek.

---

[1] A $p_\nu \neq p_\mu$ feltétel nem megszorítása az általánosságnak, mert a (2) sorozat itt vizsgált tulajdonsága független attól, hogy valamely tag benne egyszer vagy többször fordul-e elő.

$R(p_\nu)$ jelenti p_ν valós részét. — x^{p_ν} alatt értjük a következőkben ezen többértékű kifejezés főértékét.

Az I. tétel tartalmazza a MÜNTZ által bebizonyított tételt: v. ö. ehhez a 3. §-t.

1. §. Egy determinánstételről.

Legyen

$$a_{\nu\mu} = \frac{1}{q_\nu + r_\mu} \qquad (\nu, \mu = 1, \ldots, n)$$

egy n-fokú determináns általános eleme, akkor e determináns értéke [1]

$$[a_{\nu\mu}]_1^n = \frac{\prod\limits_{\nu>\mu}^{1,n} (q_\nu - q_\mu)(r_\nu - r_\mu)}{\prod\limits_{\nu,\mu=1}^{n} (q_\nu + r_\mu)}.$$

Ha speciálisan

$$r_\nu = \bar{q}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n),^2$$

akkor innen

$$\left[\frac{1}{q_\nu + \bar{q}_\mu}\right]_1^n = \frac{\prod\limits_{\nu>\mu}^{1,n} |q_\nu - q_\mu|^2}{\prod\limits_{\nu,\mu=1}^{n} (q_\nu + \bar{q}_\mu)}. \tag{4}$$

2. §. Középértékben való megközelítésről.

Legyen

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \tag{5}$$

a valós vagy komplex számok egy sorozata, mely a következő feltételnek tesz eleget

---

[1] A. Cauchy, Mémoire sur les fonctions alternées et sur les sommes alternées [Exercices d'analyse et de phys. math., II (1841), p. 151—159 (Oeuvres complètes 2^e série. XII (megjelenőben))].

Rosenhain, Auszug mehrerer Schreiben an Herrn Professor Jacobi über die hyperelliptischen Transzendenten [Journal für die reine und angewandte Mathematik 40 (1850), S. 319—360], 350—351. o.

F. Joachimsthal, Bemerkungen über den Sturmschen Satz. [Ibidem 48 (1854), S. 386—416], 414. o.

R. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, vierte Auflage, Leipzig 1875, 92—94. o.

S. Günther, Lehrbuch der Determinanten-Theorie, zweite Aufl., Erlangen 1877, 111—112. o.

Th. Muir, The Theory of Determinants in the historical Order of Development, London, Vol. I. 1906, 342—345. o., Vol. II. 1911, 171—172. o.

[2] $\bar{q}_\mu$ jelenti q_μ komplex konjugált értékét.

$$\lambda_\nu \neq \lambda_\mu \quad \text{ha} \quad \nu \neq \mu; \quad R(\lambda_\nu) > -\tfrac{1}{2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots); \tag{5'}$$

legyen továbbá $f(x)$ az x valós változónak valós vagy komplex függvénye a $(0, 1)$ intervallumban.

Ha tetszésszerinti positiv ε számhoz található egy

$$a_1 x^{\lambda_1} + a_2 x^{\lambda_2} + \cdots + a_n x^{\lambda_n}$$

kifejezés, mely az

$$\int_0^1 |f(x) - (a_1 x^{\lambda_1} + a_2 x^{\lambda_2} + \cdots + a_n x^{\lambda_n})|^2 \, dx < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget kielégíti, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ *az*

$$x^{\lambda_1}, \; x^{\lambda_2}, \; x^{\lambda_3}, \ldots \tag{6}$$

sorozattal középértékben megközelíthető a $(0, 1)$ *intervallumban.* Ha valamely függvény egyenletesen megközelíthető, akkor nyilván középértékben is megközelíthető a vizsgált számközben. Tehát ahhoz, hogy egyenletesen legyen megközelíthető, mindenesetre szükséges, hogy középértékben legyen megközelíthető. Bebizonyítom most a következő tételt:

A) *Ahhoz, hogy minden a* $(0, 1)$ *számközben folytonos függvény a* (6) *sorozattal középértékben meg legyen közelíthető, szükséges és elegendő, hogy a* $\sum_1^\infty \nu \dfrac{1 + 2R(\lambda_\nu)}{1 + |\lambda_\nu|^2}$ *sor széttartson.* A λ_ν-k az (5′) feltételnek vannak alávetve.

Bizonyítás. Legyen λ_0 egy positiv egész szám vagy zérus és legyen

$$\lambda_0 \neq \lambda_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

(ha ilyen λ_0 nincs, akkor elég a már idézett WEIERSTRASS-féle tételre hivatkoznunk).

Mindenekelőtt meghatározzuk az

$$\int_0^1 |x^{\lambda_0} + u_1 x^{\lambda_1} + \cdots + u_n x^{\lambda_n}|^2 \, dx$$

kifejezés minimumát, ha $u_1, \ldots, u_n$ független komplex változók.

Azaz meghatározandó a

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\nu\mu} u_\nu \bar{u}_\mu, \quad u_0=1, \quad c_{\nu\mu} = \int_0^1 x^{\lambda_\nu+\bar{\lambda}_\mu} dx = \frac{1}{\lambda_\nu+\bar{\lambda}_\mu+1}$$

positiv definit HERMITE-féle alak minimuma.[1]

Könnyen kimutatható, hogy a keresett érték:

$$m_n = \frac{[c_{\mu\nu}]_0^n}{[c_{\mu\nu}]_1^n}; \tag{7}$$

ugyanis világos, hogy a keresett minimum létezik. Ha most az $u_\nu = v_\nu + i w_\nu$ $(\nu=0,\dots,n)$ helyettesitést végezzük, akkor a v_ν, w_ν határozatlanoknak egy valós quadratikus függvényét nyerjük:

$$Q \equiv \sum_{\nu,\mu=0}^{n} c_{\nu\mu} [v_\nu v_\mu + w_\nu w_\mu - i(v_\nu w_\mu - v_\mu w_\nu)] \quad (v_0=1,\ w_0=0),$$

és innen differencziálással a minimumra a következő feltételek erednek:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial v_\mu} &\equiv \sum_0^n{}^\nu c_{\nu\mu}(v_\nu + i w_\nu) + \sum_0^n{}^\nu c_{\mu\nu}(v_\nu - i w_\nu) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial w_\mu} &\equiv \sum_0^n{}^\nu c_{\nu\mu}(w_\nu - i v_\nu) + \sum_0^n{}^\nu c_{\mu\nu}(w_\nu + i v_\nu) = 0 \end{aligned}\right\} (\mu=1, 2, \dots, n),$$

azaz

$$\frac{\partial Q}{\partial v_\mu} + i\frac{\partial Q}{\partial w_\mu} \equiv 2\sum_0^n{}^\nu c_{\nu\mu} u_\nu = 0 \quad (\mu = 1, \dots, n), \ (u_0 = 1).$$

Ezek figyelembevételével következik:

$$\sum_0^n{}^\nu c_{\nu 0} u_\nu = m_n;$$

és ha az így nyert egyenletrendszerből u_0-t kiküszöbölöm és figyelembe veszem, hogy $u_0=1$, nyerem a (7) relácziót.

Most már (4) szerint

---

[1] $c_{\nu\mu}$ kiszámitásánál használtuk fel az $R(\lambda_\nu) > -\frac{1}{2}$ feltevést.

$$m_n = \frac{\prod\limits_{\nu>\mu}^{0,n} |\lambda_\nu - \lambda_\mu|^2}{\prod\limits_{\nu,\mu=0}^{n} (\lambda_\nu + \bar{\lambda}_\mu + 1)} : \frac{\prod\limits_{\nu>\mu}^{1,n} |\lambda_\nu - \lambda_\mu|^2}{\prod\limits_{\nu,\mu=1}^{n} (\lambda_\nu + \bar{\lambda}_\mu + 1)},$$

és innen

$$m_n = \frac{1}{2\lambda_0 + 1} \prod_{1}^{n} \left| \frac{\lambda_\nu - \lambda_0}{\lambda_\nu + \lambda_0 + 1} \right|^2.$$

Nyilván

$$0 \leqq m_{n+1} \leqq m_n,$$

tehát $\lim\limits_{n=\infty} m_n = m$ létezik és x^{λ_0} a (6) sorozattal középértékben megközelíthető vagy nem, a szerint, a mint $m=0$ vagy $m>0$. Ennek megvizsgálására legyen

$$\lambda_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

akkor

$$\left| \frac{\lambda_\nu - \lambda_0}{\lambda_\nu + \lambda_0 + 1} \right|^2 = \frac{(\sigma_\nu - \lambda_0)^2 + \tau_\nu^2}{(\sigma_\nu + \lambda_0 + 1)^2 + \tau_\nu^2} = 1 - \gamma_\nu,$$

a hol

$$\gamma_\nu = \frac{(2\sigma_\nu + 1)(2\lambda_0 + 1)}{(\sigma_\nu + \lambda_0 + 1)^2 + \tau_\nu^2} > 0,$$

tehát $m=0$, ha $\sum\limits_{1}^{\infty}{}^\nu \gamma_\nu$ széttartó és $m>0$, ha $\sum\limits_{1}^{\infty}{}^\nu \gamma_\nu$ összetartó. De az

$$\frac{1+2\sigma_\nu}{1+\sigma_\nu^2+\tau_\nu^2} = \frac{1+2\sigma_\nu}{(\sigma_\nu+\lambda_0+1)^2+\tau_\nu^2} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{(\lambda_0+1)(2\sigma_\nu-\lambda_0)}{(\sigma_\nu+\lambda_0+1)^2+\tau_\nu^2}}$$

relációból rögtön következik, hogy a

$$\sum_{1}^{\infty}{}^\nu \gamma_\nu \quad \text{és} \quad \sum_{1}^{\infty}{}^\nu \frac{1+2\sigma_\nu}{1+\sigma_\nu^2+\tau_\nu^2}$$

sorok egyidejűleg összetartók vagy széttartók; ha tehát a

$$\sum_{1}^{\infty}{}^\nu \frac{1+2\sigma_\nu}{1+\sigma_\nu^2+\tau_\nu^2} = \sum_{1}^{\infty}{}^\nu \frac{1+2R(\lambda_\nu)}{1+|\lambda_\nu|^2} \tag{8}$$

sor széttartó, akkor mindegyik hatvány: x^{λ_0}, és így *a* WEIERSTRASS-*féle tétel alkalmazásával* egyúttal minden folytonos függvény a (6) sorozattal középértékben megközelíthető; ha ellenben a (8) sor összetartó, akkor egyetlen hatvány sem közelíthető meg középértékben a (6) sorozattal és az

$$\frac{1}{2\lambda_0+1}\prod_{1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_\nu-\lambda_0}{\lambda_\nu+\lambda_0+1}\right|^2$$

összetartó végtelen szorzat az x^{λ_0} megközelíthetőségének alsó határát állítja elő a (0, 1) számközben.

Ezzel az *A)* tétel be van bizonyítva; a levezetésből egyúttal világos, hogy a feltétel ugyanaz marad, ha csak valós függvényekre szorítkozunk.

E szerint mindenesetre szükséges feltétel, hogy a (2) sorozat végtelen sok tagot tartalmazzon.

*

Az absolut értékük négyzetével együtt LEBESGUE-féle értelemben integrabilis függvények egy sorozatát

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ldots,\ \big(\varphi_\nu(x)=\chi_\nu(x)+i\psi_\nu(x)\big) \qquad (9)$$

teljesnek nevezzük *az* (a, b) *számközben*, ha nincs oly, absolut értéke négyzetével együtt, LEBESGUE-féle értelemben integrabilis $f(x)$ függvény,[1] a mely valamennyihez orthogonális, azaz kielégíti ezen egyenletrendszert:

$$\int_a^b f(x)\,\bar{\varphi}_\nu(x)\,dx=0 \quad (\nu=1,2,3,\ldots)^2 \qquad (10)$$

és legfeljebb egy 0-méretű halmaz pontjaiban tűnik el.

Egy sorozat akkor és csakis akkor teljes, ha vele minden

[1] Az ily függvényekről röviden azt mondjuk, hogy az [*L*] osztályba tartoznak.

[2] $\bar{\varphi}_\nu(x)=\chi_\nu(x)-i\psi_\nu(x)$.

folytonos függvény középértékben megközelíthető. Ez valós függvények esetére ismeretes és az ott alkalmazott bizonyítás közvetlenül átvihető komplex függvények esetére. Teljesség kedvéért a bizonyítást a következőkben vázolom.

Mindenekelőtt megjegyzendő: ha egy sorozattal minden *folytonos* függvény középértékben megközelíthető, akkor vele egyúttal minden, az $[L]$ osztályba tartozó függvény is középértékben megközelíthető, mert minden ilyen függvény folytonos függvényekkel középértékben megközelíthető. Legyen ugyanis $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ a vizsgált függvény, a hol $f_1(x)$, $f_1^2(x)$, $f_2(x)$, $f_2^2(x)$ Lebesgue-féle értelemben integrabilisek, akkor közelítő függvények gyanánt nyilván az $f_1(x)$ és $f_2(x)$ függvényekhez tartozó Fourier-sorok részletösszegeit vehetjük.

Tegyük fel most már, hogy a (9) sorozattal minden az $[L]$ osztályba tartozó függvény középértékben megközelíthető; bebizonyítjuk, hogy akkor a (9) sorozat teljes. Legyen ugyanis $f(x)$ egy függvény, mely a (10) egyenletrendszert kielégíti. Feltevés szerint tetszésszerinti kis positiv ε számhoz található egy kifejezés

$$a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

úgy, hogy

$$\int_a^b |f(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)|^2\, dx < \varepsilon,$$

azaz, (10) figyelembevételével

$$\int_a^b \{|f(x)|^2 + |a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)|^2\}\, dx < \varepsilon,$$

tehát

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx < \varepsilon;$$

ez azt jelenti, hogy

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx = 0,$$

s ezzel állításunk első része be van bizonyítva; a (9) sorozat teljes.

Tegyük fel fordítva, hogy a (9) sorozat teljes; bebizonyítjuk, hogy akkor általa minden, az $[L]$ osztályba tartozó függvény középértékben megközelíthető. E czélból mindenekelőtt a (9) sorozatot az ismert módon egy orthogonális sorozattal helyettesítjük. Képezzük ugyanis e függvényeket:

$$\omega_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\int_a^b |\varphi_1(y)|^2 dy}}$$

$$\omega_2(x) = \frac{\varphi_2(x) - \omega_1(x)\int_a^b \varphi_2(z)\overline{\omega}_1(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left|\varphi_2(y) - \omega_1(y)\int_a^b \varphi_2(z)\overline{\omega}_1(z)\,dz\right|^2 dy}}$$

. . . .

$$\omega_n(x) = \frac{\varphi_n(x) - \sum_1^{n-1}{}^{\nu}\omega_\nu(x)\int_a^b \varphi_2(z)\overline{\omega}_\nu(z)\,dz}{\sqrt{\int_a^b \left|\varphi_n(y) - \sum_1^{n-1}{}^{\nu}\omega_\nu(y)\int_a^b \varphi_n(z)\overline{\omega}_\nu(z)\,dz\right|^2 dy}}$$

. . . .

E képletek segítségével $\omega_\nu(x)$ előállítható mint a $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x)$ függvények homogen lineár kifejezése állandó együtthatókkal. Hasonlóan állítható elő $\varphi_\nu(x)$ az $\omega_1(x)$, $\omega_2(x), \ldots, \omega_\nu(x)$ függvényekkel. Feltesszük, hogy a (9) sorozat bárhány véges számú tagja egymástól lineárisan független. Ez bizonyos tagok törlése által mindig elérhető, a nélkül, hogy a sorozat teljességét csorba érné. Ezzel elérjük, hogy a fenti képletekben előforduló nevezők egyike sem tűnik el. Ha ugyanis n volna az *első* index, a melynél ez bekövetkezik, akkor fennállna ezen egyenlet:

$$\varphi_n(x) - \sum_1^{n-1}{}^{\nu}\omega_\nu(x)\int_a^b \varphi_n(z)\overline{\omega}_\nu(z)\,dz = 0,$$

és mivel az $\omega_\nu(x)$ $(\nu=1,\ldots, n-1)$ függvények a $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ függvényeknek lineár homogen kifejezései, ellentmondásba jutnánk ama feltevésünkkel, hogy a $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ függvények egymástól lineárisan nem függnek.

Az

$$\omega_1(x),\ \omega_2(x),\ \omega_3(x), \ldots \tag{11}$$

függvények egy normált orthogonális függvénysorozatot alkotnak, azaz fennállnak a következő egyenletek:

$$\int_a^b \omega_\mu(x)\,\overline{\omega}_\nu(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu \neq \nu \\ 1, & \text{ha } \mu = \nu. \end{cases}$$

A (11) sorozat első két tagjáról ez közvetlenül világos; tegyük most fel, hogy igaz a sorozat első $n-1$ tagjára, kimutatjuk, hogy akkor a sorozat első n tagjára is áll. Ugyanis nyilván

$$\int_a^b |(\omega_n(x)|^2\,dx = 1$$

és

$$\int_a^b \omega_n(x)\,\overline{\omega}_\varrho(x)\,dx = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Legyen most már

$$\omega_n(x) = c_{n1}\varphi_1(x) + c_{n2}\varphi_2(x) + \cdots + c_{nn}\varphi_n(x)\,; \tag{12}$$

mivel nyilván $c_{nn} \neq 0$, tehát fordítva is $\varphi_n(x)$ előállítható ily alakban

$$\varphi_n(x) = d_{n1}\omega_1(x) + d_{n2}\omega_2(x) + \cdots + d_{nn}\omega_n(x).$$

Ha tehát a (9) sorozat teljes, akkor a (11) sorozat is teljes. Tegyük fel most már, hogy létezik egy, az $[L]$ osztályba tartozó $f(x)$ függvény, a mely a (9) sorozattal nem közelíthető meg középértékben; akkor a függvény (12) figyelembevételével a (11) sorozattal sem közelíthető meg középértékben. Legyen továbbá

$$a_\nu = \int_a^b f(x)\overline{\omega}_\nu(x)\,dx \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)\,;$$

könnyen kimutatható, a valós eset analógiájára, hogy létezik egy, az $[L]$ osztályba tartozó $F(x)$ függvény, úgy hogy

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \Big|F(x) - \sum_1^n{}^\nu a_\nu \overline{\omega}_\nu(x)\Big|^2\,dx = 0.$$

Már most az

$$u(x) = F(x) - f(x)$$

függvényre nézve fennállnak ezen egyenletek:

$$\int_b^b u(x)\overline{\omega}_\nu(x)\,dx = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

tehát sorozatunk nem volna teljes, a mi feltevésünkkel ellenkezik.

Az *A)* tételt tehát így is fogalmazhatjuk:

A') *A* (6) *sorozat akkor és csak akkor teljes a* (0, 1) *intervallumban, ha a* (8) *sor széttartó.*

E tételnek közvetlen folyománya a következő:

B) *Ha az* $f(x)$ *függvény folytonos a* (0, 1) *számközben és az*

$$\int_0^1 f(x)\, x^{\bar{\lambda}_\nu} dx \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{13}$$

állandók mind eltűnnek, akkor $f(x)$ *azonosan eltűnik:*[1] azaz egy a (0, 1) számközben folytonos függvény a (13) állandók által teljesen meg van határozva. Ezt úgy szokás kifejezni, hogy *a* (6) *függvénysorozat zárt a* (0, 1) *számközben. Itt fel van tételezve, hogy* $R(\lambda_\nu) > -\frac{1}{2}$, $\lambda_\nu \neq \lambda_\mu$ és $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1+2R(\lambda_\nu)}{1+|\lambda_\nu|^2}$ *széttartó.* Hogy e sor összetartása mellett a (6) függvénysorozat lehet-e zárt, az még nyilt kérdés.

---

[1] A $\lambda_\nu = \nu - 1$ speciális esetre már Lerch, Stieltjes, Phragmén, Landau és Fejér adtak bizonyításokat; v. ö. E. Landau, Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion [Rend. del Circ. Mat. di Palermo 25 (1908), S. 337—346] és az itt idézett irodalmat, továbbá L. Fejér, Uber die Laplacesche Reihe [Math. Ann. 67 (1909), S. 76—109], 6.-ik §. — C. N. Moore, On Certain Constants Analogous to Fourier's Constants [Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 14 (1908), p. 368—378: vol. 15 (1909), p. 116]. — Bizonyos általánosabb esetre lásd Müntz dolgozatában a 158-ik oldalon [4] alatt i. h.

3. §. Az I. tétel bebizonyítása.

A bebizonyitandó tétel:

Ahhoz, hogy az

$$1, x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots, x^{p_\nu}, \ldots \tag{12}$$

függvénysorozat, a hol

$$p_\nu \neq p_\mu, \quad R(p_\nu) > 0, \tag{13}$$

a folytonos függvények bázisa legyen a (0, 1) *számközben, a* $\sum_1^\infty {}^\nu \frac{1+R(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2}$ *sor széttartása szükséges és a* $\sum_1^\infty {}^\nu \frac{R(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2}$ *sor széttartása elegendő.*

A szükséges feltétel rögtön következik az *A)* tételből, mert a (3) feltétel is ki lévén elégítve, a $\sum_1^\infty {}^\nu \frac{1+2R(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2}$ sor széttartása egyértelmű azzal, hogy a

$$\sum_1^\infty {}^\nu \frac{1+R(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2} \tag{14}$$

sor széttartó legyen. Hogy az elegendő feltételt levezessem, először is kimutatom, hogy — e divergenczia-feltétel ki lévén elégítve — az x^λ hatvány, a hol λ valós és $\lambda \geqq 1$, egyenletesen közelíthető meg a (12) hatványok sorozatával. Evvel különben a tétel lényegében már be is lesz bizonyítva. Alkalmazom az *A)* tételt az $x^{\lambda-\frac{1}{2}}$ függvényre és a

$$\lambda_\nu = p_\nu - \tfrac{1}{2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

kitevő sorozatra, a mely szintén teljesiti az *A)* tételben szereplő feltételeket;[1] akkor mondhatom, hogy tetszésszerinti kis

---

[1] A $\sum_1^\infty {}^\nu \frac{R(p_\nu)}{1+|p_\nu-\frac{1}{2}|^2}$ sor széttartása következik a $\sum_1^\infty {}^\nu \frac{R(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2}$ sor széttartásából, sőt e két sor egyidejűleg széttartó vagy összetartó; ugyanis

$$\sum_1^\infty {}^\nu \frac{R(p_\nu)}{1+|p_\nu-\frac{1}{2}|^2} = \sum_1^\infty \frac{R(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2} \cdot \frac{1+|p_\nu|^2}{1+|p_\nu-\frac{1}{2}|^2},$$

és

$$1+|p_\nu-\tfrac{1}{2}|^2 \leqq 1+2(|p_\nu|^2+\tfrac{1}{4}) < 2(|p_\nu|^2+1)$$

$$1+|p_\nu-\tfrac{1}{2}|^2 \geqq 1+(|p_\nu|-\tfrac{1}{2})^2 \geqq 1+\tfrac{1}{2}(|p_\nu|^2-\tfrac{1}{4}) > \tfrac{1}{2}(|p_\nu|^2+1),$$

tehát

$$\frac{1}{2} < \frac{1+|p_\nu|^2}{1+|p_\nu-\frac{1}{2}|^2} < 2.$$

positiv ε számhoz található egy

$$a_1 x^{p_1-\frac{1}{2}}+a_2 x^{p_2-\frac{1}{2}}+\cdots+a_n x^{p_n-\frac{1}{2}}$$

kifejezés, úgy hogy

$$\int_0^1 |x^{\lambda-\frac{1}{2}}+a_1 x^{p_1-\frac{1}{2}}+\cdots+a_n x^{p_n-\frac{1}{2}}|^2\, dx < \frac{\varepsilon^2}{(\lambda+1)^2}. \tag{15}$$

Most már nyilván

$$\frac{x^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\lambda+\frac{1}{2}}+a_1\frac{x^{p_1+\frac{1}{2}}}{p_1+\frac{1}{2}}+\cdots+a_n\frac{x^{p_n+\frac{1}{2}}}{p_n+\frac{1}{2}}=$$
$$=\int_0^x (z^{\lambda-\frac{1}{2}}+a_1 z^{p_1-\frac{1}{2}}+\cdots+a_n z^{p_n-\frac{1}{2}})\, dz;$$

tehát

$$\left|\frac{x^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\lambda+\frac{1}{2}}+a_1\frac{x^{p_1+\frac{1}{2}}}{p_1+\frac{1}{2}}+\cdots+a_n\frac{x^{p_n+\frac{1}{2}}}{p_n+\frac{1}{2}}\right|\leqq$$
$$\leqq\int_0^x |z^{\lambda-\frac{1}{2}}+a_1 z^{p_1-\frac{1}{2}}+\cdots+a_n z^{p_n-\frac{1}{2}}|\, dz;$$

és ha itt a jobboldali kifejezésre az

$$\int_a^b |g(z)|\, dz \leqq \left[(b-a)\int_a^b |g(z)|^2\, dz\right]^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

jól ismert egyenlőtlenséget alkalmazzuk, akkor (15) tekintetbevételével

$$\left|\frac{x^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\lambda+\frac{1}{2}}+a_1\frac{x^{p_1+\frac{1}{2}}}{p_1+\frac{1}{2}}+\cdots+a_n\frac{x^{p_n+\frac{1}{2}}}{p_n+\frac{1}{2}}\right|\leqq x^{\frac{1}{2}}\frac{\varepsilon}{\lambda+1}\quad(0\leqq x\leqq 1),$$

azaz

$$\left|x^{\lambda}+\frac{a_1(\lambda+\frac{1}{2})}{p_1+\frac{1}{2}}x^{p_1}+\cdots+\frac{a_n(\lambda+\frac{1}{2})}{p_n+\frac{1}{2}}x^{p_n}\right|\leqq\varepsilon\quad(0\leqq x\leqq 1).$$

Tehát bármely positiv egész hatvány egyenletesen közelíthető meg a (2) sorozattal; de akkor *a* Weierstrass-*féle tétel szerint* vele bármely folytonos függvény is megközelíthető.

Ezzel az I. tétel teljesen be van bizonyitva.[1]

Ha létezik egy positiv α szám úgy, hogy

$$R(p_\nu) \geqq \alpha \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots),$$

akkor a (14) feltétel nyilván a következővel helyettesíthető:

$$\sum_1^\infty {}_\nu \frac{R(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2}$$

széttartó; és e feltétel a jelen esetben egyértelmű a következővel:

$$\sum_1^\infty {}_\nu \frac{R(p_\nu)}{|p_\nu|^2}$$

széttartó, miként a

$$\sum_1^\infty {}_\nu \frac{R(p_\nu)}{1+|p_\nu|^2} = \sum_1^\infty {}_\nu \frac{R(p_\nu)}{|p_\nu|^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{|p_\nu|^2}}$$

relációból közvetlenül kitűnik. Tehát ebben az esetben a szükséges feltétel az elegendővel összeesik. Kimondhatjuk tehát e tételt:

I'. *Az*

$$1, x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots, x^{p_\nu}, \ldots$$

függvénysorozat, a hol

$$p_\nu \neq p_\mu, \quad R(p_\nu) \geqq \alpha > 0,$$

akkor és csakis akkor bázisa a folytonos függvényeknek a (0, 1) *számközben, ha a* $\sum_1^\infty {}_\nu \frac{R(p_\nu)}{|p_\nu|^2}$ *sor széttartó.*[2]

---

[1] Könnyen ktmutatbató, hogy a (2) függvénysorozatban az 1 tag elhagyható, ha *az* $x=0$ *helyen eltünő* folytonos függvényekre szorítkozunk. V. ö. Szász, Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen [Mathem. Annalen, Bd. 77 (1916), p. 482—496.], 491. o.

[2] E tétel nyilván tartalmazza a MÜNTZ által bebizonyított tételt.

Ha $R(p_\nu)>0$ és $\lim\limits_{\nu=\infty} p_\nu = 0$, akkor a (14) feltétel mindig teljesül, ha csak a (2) sorozat végtelen sok tagot tartalmaz és az elegendő feltétel így hangzik:

$\sum\limits_1^\infty{}^\nu R(p_\nu)$ széttartó. Ha speciálisan a p_ν-k valós és positiv számok és $\lim\limits_{\nu=\infty} p_\nu=0$, akkor[1] tehát érvényes e tétel:

I″. *Ha* $\lim p_\nu=0$, $p_\nu>0$ és $\sum\limits_1^\infty{}^\nu p_\nu$ *széttartó, akkor az*

$$1, x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots, x^{p_\nu}, \ldots$$

függvénysorozat bázisa a folytonos függvényeknek a (0, 1) *számközben.*[2]

Az $x=zb$ transformáczióból kitűnik, hogy az I. tétel a $(0, b)$ intervallumra is érvényes, hol b tetszésszerinti valós szám.

4. §. Trigonometrikus függvényekkel való megközelítésről.

Ha az I. tételben

$$p_\nu=1+i\tau_\nu \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots), \quad \tau_\nu \neq \tau_\mu,$$

és valós folytonos függvényekre szorítkozunk, akkor nyerjük, hogy az

$$1, \ x\cos(\tau_\nu \log x), \ \ x\sin(\tau_\nu \log x) \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots) \qquad (17)$$

---

[1] MÜNTZ régebben alkalmilag közölte velem, hogy a következőt tudja ezen esetre bebizonyítani:

1. A $\sum\limits_1^\infty{}^\nu p_\nu$ sor széttartása szükséges feltétel arra, hogy a (12) sorozat bázis legyen,

2. ha $p_\nu = \frac{1}{\nu}$, a sorozat biztosan bázis.

Megjegyzés a korrektúránál: (1916 június 22):

A 2. állítás bizonyítását MÜNTZ a következő nemrégen megjelent dolgozatában közölte: Approximation willkürlicher Funktionen durch Wurzeln [Archiv der Math. und Phys. III. R., 24. Bd. (1916), S. 310—316], ellenben az 1. állítás bizonyítása tudtommal mindezideig nincs közölve.

[2] A 172-ik old. [1] alatti lábjegyzete figyelembe vételével világos, hogy az I′, I″ tételekben is az 1 tag elhagyható, ha az $x=0$ helyen eltűnő folytonos függvényekre szorítkozunk.

sorozat mindenesetre bázis a $(0, b)$ intervallumban, ha a $\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{1}{1+\tau_\nu^2}$ sor széttartó.[1]

Innen következik, hogy *az*

$$1, \; e^{-z} \cos \tau_\nu z, \; e^{-z} \sin \tau_\nu z \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots) \tag{18}$$

sorozat ugyanazon feltétel mellett bázis az (a, $+\infty$) *intervallumban.* Legyen ugyanis

$$e^{-z}=x, \quad b=e^{-a} \text{ (a valós)};$$

hogy valamely az $a \leqq z \leqq +\infty$ intervallumban folytonos $f(z)$ függvényt egyenletesen megközelítsünk a (18) sorozattal, elegendő az $f(-\log x)$ függvényt a $0 \leqq x \leqq b$ intervallumban a (17) sorozattal megközelítenünk.

Ha véges (a, d) intervallumról van szó, akkor annál inkább lesz $e^{-z} f(z)$ ily egyenletesen összetartó sorba fejthető:

$$e^{-z} f(z) = k + e^{-z} \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} P_\nu(z),$$

a hol $P_\nu(z)$ lineáris kifejezése a

$$\cos \tau_n z, \quad \sin \tau_n z \quad (n=1, 2, \ldots, \nu)$$

függvényeknek valós együtthatókkal. Innen

$$f(z) = ke^z + \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} P_\nu(z).$$

Tehát *az*

$$e^z, \; \cos \tau_\nu z, \; \sin \tau_\nu z \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots)$$

sorozat bázis bármely véges intervallumban, ha csak $\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{1}{1+\tau_\nu^2}$ *széttartó.*[2]

---

[1] Itt a logarithmus főértéke veendő.

[2] Sőt az e^z tag elhagyható: v. ö. a 172-ik oldalon [1] alatt idézett dolgozatom 4. §-át.

Általánosabb jellegű feltételekhez más úton jutunk. Bebizonyítjuk e tételt:

II. *Tétel. Az*

$$1,\ c_1 \sin \varrho_\nu x - c_2 \cos \varrho_\nu x\ (\nu=1, 2, 3, \ldots),\ \varrho_\nu \neq \varrho_\mu \neq 0$$

függvénysorozat, a hol c_1, c_2, *el nem tünő állandók, bázisa a folytonos függvényeknek bármely* (a, d) *számközben, ha létezik egy* $\delta > 0$ *szám úgy, hogy* $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{|\varrho_\nu|^{1+\delta}}$ *széttartó. Ha a* c_1, c_2 *számok egyike eltűnik, akkor felteszem, hogy a kezdőpont nem fekszik az* (a, d) *számköz belsejében.*

A tétel bebizonyítása céljából először is kimutatjuk, hogy a

$$c_1 \cos \varrho_\nu x + c_2 \sin \varrho_\nu x \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots) \tag{19}$$

függvénysorozat a

$$\varrho_\nu \neq \varrho_\mu \neq 0,\ \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{|\varrho_\nu|^{1+\delta}} \text{ széttartó} \tag{20}$$

feltétel mellett *teljes* az (a, d) számközben. Ha nem volna teljes, akkor létezne egy az $[L]$ osztályba tartozó $f(x)$ függvény úgy, hogy

$$\int_a^d f(x)\,(c_1 \cos \varrho_\nu x + c_2 \sin \varrho_\nu x)\,dx = 0 \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots), \tag{21}$$

azaz az

$$F(\lambda) = \int_a^d f(x)\,(c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x)\,dx$$

függvény eltűnne a

$$\lambda = \varrho_\nu \quad (\nu=1, 2, 3, \ldots)$$

helyeken. De $F(\lambda)$ nyilván transcendens egész függvény, és

$$|F(\lambda)| \leqq \int_a^d |f(x)|\,(|c_1| + |c_2|)\, e^{|\lambda|(|d|+|a|)}\,dx,$$

azaz

$$|F(\lambda)| \leqq a e^{\beta|\lambda|}, \tag{22}$$

a hol α és β alkalmasan választott állandók. Továbbá könynyen igazolható, hogy $F(\lambda)$ nem tűnik el azonosan; ez ugyanis azt jelentené, hogy

$$c_1\int_a^d f(x)\, x^{2\nu}\, dx=0,\quad c_2\int_a^d f(x)\, x^{2\nu+1} dx=0\quad (\nu=0, 1, 2,\ldots),$$

és, az előbbi eredmények figyelembe vételével, ez nem lehetséges, ha c_1 és c_2 a nullától különbözők, bárminő (a, d) számközről legyen is szó. Ha pedig az (a, d) számköz az $x=0$ helyet nem tartalmazza belsejében, akkor a c_1 és c_2 számok közül az egyik el is tünhetik.

Ha már most $F(\lambda)$-nak végtelen sok, a nullától különböző zérus helye van:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ldots,\quad 0<|\lambda_\nu|\leqq|\lambda_{\nu+1}|,$$

akkor (22)-ből egy jól ismert tétel szerint következik, hogy

$$\frac{1}{|\lambda_\nu|}<\frac{c}{\nu}\quad (\nu=1, 2, 3,\ldots),$$

a hol c egy alkalmasan választott positiv állandó. Tehát

$$\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{|\lambda_\nu|^{1+\delta}}$$

összetartó, ha csak $\delta>0$.

Innen (20) figyelembevételével nyilvánvaló, hogy a (21) egyenletek nem állhatnak fönn, azaz a (19) függvénysorozat teljes az (a, d) számközben.

De egy már RIESZ FRIGYES-től [1] felállított tétel értelmében, ha

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ldots$$

egy, az (a, d) számközben teljes függvénysorozat, akkor

$$1,\ \psi_\nu(x)=\int_0^x \varphi_\nu(z)\, dz\quad (\nu=1, 2, 3,\ldots)$$

egy bázisa a folytonos függvényeknek ugyanazon számközben. Legyen ugyanis $\lambda\geqq1$ és

[1] A 158-ik oldalon i. h. *a*), 1410–1411. o.; *c*). 52. o.

$$\int_a^d |\lambda x^{\lambda-1}+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)|^2\,dx<\varepsilon^2, \tag{23}$$

akkor

$$\int_a^z \big(\lambda x^{\lambda-1}+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)\big)dx = z^\lambda+a_1\psi_1(x)+\cdots+a_n\psi_n(x)-$$
$$-\big(a^\lambda+a_1\psi_1(a)+\cdots+a_n\psi_n(a)\big),$$

tehát

$$|z^\lambda+a_1\psi_1(z)+\cdots+a_n\psi_n(z)-\big(a^\lambda+a_1\psi_1(a)+\cdots+a_n\psi_n(a)\big)|\leqq$$
$$\leqq\int_a^z |\lambda x^{\lambda-1}+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)|\,dx;$$

és ha itt a jobboldali kifejezésre a (16) egyenlőtlenséget alkalmazzuk és (23)-t figyelembe vesszük, nyerjük hogy

$$|z^\lambda+a_1\psi_1(z)+\cdots+a_n\psi_n(z)-\big(a^\lambda+\cdots+a_n\psi_n(a)\big)|\leqq\varepsilon\sqrt{a-d},$$

ha

$$a\leqq z\leqq d.$$

Ezzel a II. tétel is be van bizonyítva.

E szerint tehát az

$$1,\ \sin\varrho_\nu x-\cos\varrho_\nu x \quad (\nu=1, 2, 3,\ldots)$$

függvénysorozat bázisa a folytonos függvényeknek bármely véges számközben, és az

$$1,\ \sin\varrho_\nu x \quad (\nu=1, 2, 3,\ldots)$$
$$1,\ \cos\varrho_\nu x \quad (\nu=1, 2, 3,\ldots)$$

függvénysorozatok mindegyike bázis a $(0, d)$ számközben, ha csak a (20) feltétel teljesül.

Hasonló úton még számos más bázis-sorozat található.

Szász Ottó.

Legyen szabad itt néhány sajtóhibát helyreigazitanom, melyeket e helyen megjelent előbbi dolgozataimban találtam:

XXI. (1912. évi) k. 285. o. 15. sor felülről: $r-1$ helyett olv. r.

XXIII. (1914. évi) k. 3. o. 8. sor felülről: b_{fk} helyett olv. b_{ik}.

$|i+\varrho|$ helyett olv. $i=\varrho+1$.

4. o. 7. sor alulról: következs helyett olv. következő.

VALÓS EGYÜTTHATÓS EGYENLETEK VALÓS GYÖKEIRŐL.

(Második közlemény.)

4. §. Reális együtthatójú egyenletek pozitiv gyökeire vonatkozó tételek.

Ha a (φ) sorozat a fölsorolt feltételeknek eleget tesz, akkor fennállanak a következő tételek:

I. Ha az

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

reális együtthatójú hatványsor konvergenciasugara R-nél nagyobb, $f(0) = a_0 \neq 0$, $f(R) \neq 0$ és $v(k)$ jelenti az

$$f(x)\, \varphi_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{k,n} x^n$$

hatványsor együtthatósorozatában föllépő jelváltások számát, M pedig az $f(x) = 0$ egyenlet R-nél kisebb pozitiv gyökeinek számát, akkor

$$\lim_{k=\infty} v(k) = M.$$

A gyökök multiplicitásukkal számítandók. Minthogy $v(k)$ csak nem negativ, egész számú értékeket vehet fel, a tétel úgy is fogalmazható, hogy K-t alkalmasan választva, minden $k \geqq K$-ra nézve $v(k) = M$.

II. Legyenek $f(x)\, \varphi_k(x)$ hatványsorában $\alpha_k, \beta_k, \ldots, \nu_k$ rendre azon tagok kitevői, a melyek után jelváltás lép föl; az I. tétel szerint ezen kitevők száma $k \geqq K$-ra nézve M-mel egyenlő.

A

$$\lim_{k=\infty} \frac{c_{k,\alpha_k}}{c_{k,\alpha_k+1}}, \quad \lim_{k=\infty} \frac{c_{k,\beta_k}}{c_{k,\beta_k+1}}, \dots, \quad \lim \frac{c_{k,\nu_k}}{c_{k,\nu_k+1}}$$

határértékek léteznek és megadják az $f(x) = 0$ egyenlet R-nél kisebb pozitiv gyökeit, mindegyiket annyiszor, a hányszoros gyöke az egyenletnek.

A kimondott tételek feltevései közül az $f(0) = a_0 \neq 0$ nem megszorítás, az $f(R) \neq 0$ pedig az alkalmazhatóság szempontjából nem lényeges megszorítás. Ha ugyanis $f(x)$ első el nem tűnő együtthatója a_s, akkor $x^{-s}f(x)$ az $x = 0$ helyen már nem tűnik el, az $x^{-s}f(x)=0$ egyenlet pozitiv gyökei pedig az $f(x) = 0$ egyenlet pozitiv gyökeivel megegyeznek. Ha pedig $x = R$ az $f(x) = 0$ egyenlet t-szeres gyöke, akkor $f(x)$ hatványsora helyett $(R-x)^{-t}f(x)$ hatványsorát vizsgálom; az új hatványsor együttható sorozata az eredetiétől különbözik, de a hozzátartozó egyenlet R-nél kisebb pozitiv gyökei az az eredetiével megegyeznek.[1] Az így preparált hatványsorra a kimondott tételek már alkalmazhatók és megadják az $f(x) = 0$ egyenlet R-nél kisebb pozitiv gyökeit.

A kimondott tételek más feltételek közt is érvényben maradnak.

III. Ha $f(x)$ hatványsorának konvergenciasugara $r \leqq R$, de még feltesszük, hogy $f(x)$ hatványsora az $x = r$ helyen divergens és együtthatósorozatában csak véges számú jelváltás lép föl, az $f(x)\,\varphi_k(x)$ hatványsorokban föllépő jelváltásokból az előbbi tételekben részletezett módon meghatározható az $f(x)=0$ egyenlet r-nél kisebb pozitiv gyökeinek pontos száma és helye.

---

[1] Az $(R-x)^{-t}f(x)$ helyett általában $g(x)\,f(x)$ szorzat is megfelel a czélnak, ha $g(x) = 0$-nak a $(0, R)$ intervallumban nincs gyöke, $g(x)$-nek $x = R$ pontosan t-szeres pólusa, $g(x)\,f(x)$ hatványsorának együtthatói reálisok és konvergenciasugara R-nél nagyobb. A $g(x)$ faktor még szabadabban is választható, ha tekintetbe veszszük a következő III. tételt.

Ha $f(x)$ a III. tétel feltevéseinek sem tesz eleget, de megadható oly $g(x)$ függvény, melynek pozitiv zérushelye nincs és olyan, hogy a $g(x)f(x)$ hatványsora a III. tétel feltevéseit már kielégíti, akkor a tétel a $g(x)f(x)=0$ egyenletre alkalmazva megadja az $f(x)=0$ egyenlet r-nél kisebb pozitiv gyökeinek számát és helyét.

5. §. Előkészítő formulák.

Hogy ne legyek kénytelen később a bizonyitás menetét megszakítani, előre bocsátok néhány megbecsülést. Vizsgálni akarom az

$$f(x)\,\varphi_k(x)=C_{k,0}+C_{k,1}x+\cdots+C_{k,n}x^n+\cdots$$

együttható sorozatában föllépő jelváltásokat.

$$C_{k,n}=c_{k,n}\left\{a_0+a_1\frac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}}+\cdots+a_{n-1}\frac{c_{k,1}}{c_{k,n}}+a_n\frac{c_{k,0}}{c_{k,n}}\right\}.$$

Minthogy nem maguk az együtthatók, csak azok jelváltásai érdekelnek, $C_{k,n}$-et megfoszthatom a pozitiv $c_{k,n}$ faktortól és az együtthatók helyett az

$$A_{k,n}=a_0+a_1\frac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}}+\cdots+a_{n-1}\frac{c_{k,1}}{c_{k,n}}+a_n\frac{c_{k,0}}{c_{k,n}}$$

számok sorozatát vizsgálom:

$$A_{k,0},\ A_{k,1},\ldots,\ A_{k,n},\ldots \tag{A}$$

A kifejezésmód könnyítése végett az (A) sorozat $A_{k,n}$ tagját a $\dfrac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}}$ helyhez vagy ponthoz tartozónak és az (A) sorozat olyan részsorozatát, a mely az (α,β) intervallum pontjaihoz tartozó tagokból áll, az (A) sorozat (α,β) intervallumhoz tartozó részsorozatának nevezem. Az írás könnyítése végett pedig ezentúl ott, a hol értelemzavartól nem kell tartani, úgy $A_{k,n}$, mint $c_{k,n}$ mellől az első indexet elhagyom: ha tehát egy kettős indexű együttható mellől az első index hiányzik, első indexül mindig k-t kell odagondolni.

Ezek után megbecsülöm a $\frac{c_{n-1}}{c_n}$ helyen vett függvényérték és a $\frac{c_{n-1}}{c_n}$ helyhez tartozó A_n különbségét:

$$f\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)-A_n=\sum_{\nu=2}^{n}a_\nu\left\{\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu-\frac{c_{n-\nu}}{c_n}\right\}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu.$$

Jelentsen G egy az $f(x)$ konvergenciasugaránál kisebb pozitiv számot és τ egy G-nél kisebb pozitiv számot; τ és G fölött később fogok pontosan diszponálni; legyen

$$\tau\leqq\frac{c_{n-1}}{c_n}\leqq G.$$

Minthogy $f(x)$ és

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|x^n$$

a $0\leqq x\leqq G$ értékekre egyenletesen konvergensekre, meghatározható a pozitiv ε-hoz L úgy, hogy

$$\left|\sum_{\nu=L+1}^{\infty}a_\nu\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu\right|\leqq\sum_{\nu=L+1}^{\infty}|a_\nu|\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu\leqq\varepsilon.$$

A (φ) sorozatra vonatkozó feltételekből következett, hogy L fixirozása után meghatározható K úgy, hogy $k\geqq K$-ra nézve

$$\frac{c_{L-1}}{c_L}\leqq\tau,$$

tehát $L\leqq n$. E szerint

$$\left|f\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)-A_n\right|\leqq\sum_{\nu=2}^{L}|a_\nu|\left\{\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu-\frac{c_{n-\nu}}{c_n}\right\}+$$

$$+\sum_{\nu=L+1}^{n}|a_\nu|\left\{\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu-\frac{c_{n-\nu}}{c_n}\right\}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|a_\nu|\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu\leqq$$

$$\leqq\sum_{\nu=2}^{L}|a_\nu|\left\{\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu-\frac{c_{n-\nu}}{c_n}\right\}+\sum_{\nu=L+1}^{\infty}|a_\nu|\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu,$$

mivel

$$0<\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu-\frac{c_{n-\nu}}{c_n}<\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu.$$

De láttuk, hogy K-t alkalmasan választva

$$0 < \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{\nu} - \frac{c_{n-\nu}}{c_n} < \varepsilon\nu\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{\nu-1},$$

ha

$$k \geqq K, \quad \frac{c_{n-1}}{c_n} \leqq G$$

és

$$\nu \leqq L,$$

tehát

$$\left|f\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n\right| \leqq \varepsilon \sum_{\nu=2}^{L} \nu \,|a_\nu|\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{\nu-1} + \varepsilon < \varepsilon F'\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) + \varepsilon, \quad (f_0)$$

a hol

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,|a_n|\,x^{n-1}.$$

Az $f(x) = 0$ egyenlet többszörös gyökei szükségessé teszik $f(x)$ deriváltjainak bevonását a számításba.

Legyen:

$$\frac{1}{p!} f^{(p)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+p}{p} a_{\nu+p}\, x^{\nu},$$

$$\frac{1}{p!} F^{(p)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+p}{p} |a_{\nu+p}|\, x^{\nu}.$$

Másrészről:

$$A_{n+1} - A_n = \left(\frac{c_n}{c_{n+1}} - \frac{c_{n-1}}{c_n}\right) a_1 + \left(\frac{c_{n-1}}{c_{n+1}} - \frac{c_{n-2}}{c_n}\right) a_2 + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{c_1}{c_{n+1}} - \frac{c_0}{c_n}\right) a_n + \frac{c_0}{c_{n+1}} a_{n+1};$$

$$\frac{A_{n+1} - A_n}{[n, n+1]} = a_1 + \frac{[n-1, n+1]}{[n, n+1]} a_2 + \cdots +$$

$$+ \frac{[1, n+1]}{[n, n+1]} a_n + \frac{[0, n+1]}{[n, n+1]} a_{n+1}.$$

Legyen

$$\frac{A_{n+1} - A_n}{[n, n+1]} = A'_n.\text{[1]}$$

[1] A determinánsok mellől is el van hagyva a k index.

Általában legyen

$$
\begin{aligned}
A_n^{(p)} &= a_p + \frac{[n-1, n+1, \ldots, n+p]}{[n, n+1, \ldots, n+p]} a_{p+1} + \\
&+ \cdots + \frac{[n-\nu, n+1, \ldots, n+p]}{[n, n+1, \ldots, n+p]} a_{p+\nu} + \\
&+ \cdots + \frac{[0, n+1, \ldots, n+p]}{[n, n+1, \ldots, n+p]} a_{p+n}.
\end{aligned}
$$ [1]

Akkor azt állítom, hogy

$$A_{n+1}^{(p)} - A_n^{(p)} = c A_n^{(p+1)},$$

a hol c egy pozitiv faktort jelent, ha k már oly nagyra van választva, hogy φ_k hatványsora legalább $(p+1)$-szeresen pozitiv, a mi a (φ) sorozatra vonatkozó 2. feltétel szerint egy alkalmasan választott K indextől kezdve mindig teljesül. Ezen identitás egyszerű számítással igazolható. Ugyanis

$$
\begin{aligned}
&[n, n+1, \ldots, n+p]\,[n+1, n+2, \ldots, n+p+1]\,\{A_{n+1}^{(p)} - A_n^{(p)}\} = \\
&= \sum_{\nu=1}^{n+1} a_{p+\nu} \{[n-\nu+1, n+2, \ldots, n+p+1]\,[n, n+1, \ldots, n+p] - \\
&\qquad - [n-\nu, n+1, \ldots, n+p]\,[n+1, n+2, \ldots, n+p+1]\};
\end{aligned}
$$

ezen formula jobboldalán $a_{p+\nu}$ együtthatója $=$

$$= [n+1\ n+2, \ldots, n+p]\,[n-\nu+1, n+1, \ldots, n+p+1],$$

a mint az kiderül, ha a

$$
\begin{array}{r|llll|llll|}
 & c_{n-\nu+1} & c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots c_{n+p+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
p+1\text{ sor}\ \Big\{ & c_{n-\nu} & c_n & c_{n+1} & \cdots c_{n+p} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
 & c_{n-\nu+1-p} & c_{n+1-p} & c_{n+2-p} & \cdots c_{n+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
 & c_{n-\nu-p} & c_{n-p} & c_{n+1-p} & \cdots c_n & c_{n+1-p} & c_{n+2-p} & \cdots & c_n \\
 & c_{n-\nu} & c_n & c_{n+1} & \cdots c_{n+p} & c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+p} \\
p+1\text{ sor}\ \Big\{ & c_{n-\nu-1} & c_{n-1} & c_n & \cdots c_{n+p-1} & c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+p-1} \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
 & c_{n-\nu+1-p} & c_{n+1-p} & c_{n+2-p} & \cdots c_{n+1} & c_{n+2-p} & c_{n+3-p} & \cdots & c_{n+1} \\
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{p+2\text{ oszlop}}} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{p\text{ oszlop}}}
\end{array}.
$$

---

[1] A'_n, $A_n^{(p)}$ is $A'_{k,n}$, $A_{k,n}^{(p)}$ helyett áll.

determinánst a LAPLACE-szabály szerint először az első $p+1$ sor, azután az utolsó p oszlop determinánsai szerint fejtjük ki. Tehát

$$\frac{[n, n+1, \ldots, n+p]\,[n+1, n+2, \ldots, n+p+1]}{[n+1, n+2, \ldots, n+p]\,[n, n+1, \ldots, n+p+1]}\left\{A_{n+1}^{(p)} - A_n^{(p)}\right\} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n+1} a_{p+\nu} \frac{[n+1-\nu, n+1, \ldots n+p+1]}{[n, n+1, \ldots, n+p+1]} = A_n^{(p+1)},$$

qu. e. d.

Ezek után megbecsülöm a különbséget $\frac{1}{p!} f^{(p)}(x)$ értéke közt a $\frac{c_{n-1}}{c_n}$ helyen és $A_n^{(p)}$ közt:

$$\frac{1}{p!} f^{(p)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n^{(p)} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{p+\nu}\left\{\binom{p+\nu}{p}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{\nu} -\right.$$

$$\left. - \frac{[n-\nu, n+1, \ldots, n+p]}{[n, n+1, \ldots, n+p]}\right\} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\binom{p+\nu}{p} a_{p+\nu}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{\nu}.$$

Legyen τ és G-nek ugyanaz a jelentése, mint előbb; és legyen $\tau \leqq \frac{c_{n-1}}{c_n} \leqq G$, akkor a pozitiv ε-hoz megadható L úgy, hogy

$$\sum_{\nu=L+1}^{\infty}\binom{p+\nu}{p} |a_{p+\nu}| \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{\nu} \leqq \varepsilon.$$

L fixirozása után megadható K úgy, hogy $\frac{c_{L-1}}{c_L} \leqq \tau$, tehát $L \leqq n$, ha $k \geqq K$. Akkor

$$\left|\frac{1}{p!} f^{(p)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n^{(p)}\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{L} + \sum_{\nu=L+1}^{n} |a_{p+\nu}| \binom{p+\nu}{p}\left\{\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{\nu} - \frac{c_{n-\nu}}{c_n}\right\} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{L} + \sum_{\nu=L+1}^{n} |a_{p+\nu}| \left|\binom{p+\nu}{p}\frac{c_{n-\nu}}{c_n} - \frac{[n-\nu, n+1, \ldots, n+p]}{[n, n+1, \ldots, n+p]}\right| +$$

$$+ \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\binom{p+\nu}{p} |a_{p+\nu}| \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{\nu} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5.$$

Tegyen K még azon követeléseknek is eleget, hogy $k \geqq K$-ra nézve egyrészt

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} - \frac{c_{n-\nu}}{c_{n-\nu+1}} \leqq \varepsilon,$$

ha

$$\nu \leqq L,$$

másrészt minden $\nu \leqq n \leqq L$ és $p \leqq P$ indexre nézve

$$\left|\binom{p+\nu}{p}\frac{c_{n-\nu}}{c_n} - \frac{[n-\nu, n+1, \ldots, n+p]}{[n, n+1, \ldots, n+p]}\right| \leqq$$

$$\leqq \varepsilon\binom{p+\nu}{p}\frac{c_{n-\nu}}{c_n} < \varepsilon\binom{p+\nu}{p}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu,$$

ha $\frac{c_{n-1}}{c_n} \leqq G$, a mi a (φ) sorozatra vonatkozó 5. feltétel szerint mindig lehetséges. Akkor, mint láttuk,

$$0 < \left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu - \frac{c_{n-\nu}}{c_n} < \varepsilon\nu\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{\nu-1},$$

tehát

$$\sigma_1 \leqq \varepsilon(p+1)\sum_{\nu=1}^{L} |a_{p+\nu}| \binom{p+\nu}{p+1}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{\nu-1} <$$

$$\leqq \varepsilon(p+1)\frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right).$$

$$\sigma_3 \leqq \varepsilon\sum_{\nu=1}^{L} |a_{p+\nu}| \binom{p+\nu}{p}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu < \varepsilon\frac{1}{p!}F^{(p)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right).$$

Végül a (φ) sorozatra vonatkozó 4. feltétel szerint K-t alkalmasan megválasztva $k \geqq K$-ra nézve a

$$\left|\binom{p+\nu}{p}\frac{c_{n-\nu}}{c_n} - \frac{[n-\nu, n+1, \ldots, n+p]}{[n, n+1, \ldots, n+p]}\right| \leqq$$

$$\leqq (1+A)\binom{p+\nu}{p}\frac{c_{n-\nu}}{c_n} < (1+A)\binom{p+\nu}{p}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^\nu$$

egyenlőtlenség is teljesül, tehát

$$\sigma_4 \leqq (1+A)\sum_{\nu=L+1}^{n} |a_{p+\nu}| \binom{p+\nu}{p}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{\nu},$$

$$\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5 < (2+A)\sum_{\nu=L+1}^{n} |a_{p+\nu}| \binom{p+\nu}{p}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{\nu}+$$

$$+\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_{p+\nu}| \binom{p+\nu}{p}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{\nu}<$$

$$<(2+A)\sum_{\nu=L+1}^{\infty} |a_{p+\nu}| \binom{p+\nu}{p}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{\nu} \leqq (2+A)\,\varepsilon\,;$$

e szerint

$$\left|\frac{1}{p!} f^{(p)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n^{(p)}\right| <$$

$$<\frac{\varepsilon}{p!}\left\{F^{(p+1)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)+F^{(p)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)\right\}+(2+A)\,\varepsilon. \qquad (f_p)$$

Ha tehát F_0 jelenti az $F(x)$ fölső határát, $F^{(p)}$ pedig az $F^{(p)}(x)$ ét a $(0, G)$ intervallumban, akkor a levezetett (f_0) és (f_p) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\left|f\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)-A_n\right| < \varepsilon\,(F_1+1), \qquad (f_0^*)$$

$$\left|\frac{1}{p!} f^{(p)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n^{(p)}\right| < \frac{\varepsilon}{p!}\,(F_p+F_{p+1})+(2+A)\,\varepsilon, \qquad (f_p^*)$$

ha $\frac{c_{n-1}}{c_n}$ a (τ, G) intervallum pontja és $k \geqq K$, a hol K a fönti kikötéseknek megfelel.

Bálint Elemér.

A Mathematikai és Physikai Társulat tanulóversenyei.

I.

A XXIII. mathematikai tanulóverseny.

A folyó évi november hó 4-én tartott XXIII. tanulóversenyre Budapesten 25, Kolozsvárt 2 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen egyidejűleg zárt helyiségben, a társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett, szabályszerűen folyt le. A verseny lefolyásáról mindkét helyen fölvett jegyzőkönyv szerint a tételek kidolgozására engedett négy órai idő alatt Budapesten 21, Kolozsvárt 2 dolgozat adatott be. A mult évben volt 51 versenyző és 38 dolgozat; ebben az évben volt 27 versenyző és 23 dolgozat.

A kitűzött tételek a következők voltak:

1. Bebizonyítandó, hogy az

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+b} = 0$$

egyenletnek, melyben a és b pozitiv számok, két valós gyöke van és hogy az egyik gyök $\frac{a}{3}$ és $\frac{2a}{3}$, a másik $-\frac{2b}{3}$ és $-\frac{b}{3}$ közé esik.

2. Felezzük valamely ABC háromszög A-nál lévő belső szögét és legyen D e szögfelező egyenes metszéspontja a BC oldallal. Bebizonyítandó, hogy a szögfelező AD darabja rövidebb, mint az AB és AC oldalak geometriai középarányosa.

3. Osszuk az

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

számokat tetszőleges módon két csoportba. Bebizonyítandó, hogy a két csoport közül az egyik olyan, hogy benne két szám található, melyeknek különbsége ugyanabban a számcsoportban foglaltatik.

A versenydolgozatokat Kőnig Dénes volt szíves előzetesen áttekinteni. A teljes bírálóbizottság határozatáról az alábbi jegyzőkönyv számol be.

Jegyzőkönyv

a XXIII. mathematikai tanulóversenyen beadott dolgozatok elbírálása ügyében 1916 november 19-én tartott bizottsági ülésről.

Jelenvolt: Rados Gusztáv elnök, Beke Manó, Éber József, Fejér Lipót, Kopp Lajos, Kürschák József, Rátz László és Kőnig Dénes előadó.

Kőnig Dénes előadó jelentésének meghallgatása és a dolgozatok áttekintése után a bizottság a következő egyhangú határozatot hozta:

A bizottság örömmel állapítja meg, hogy bár a versenyen a szokottnál kevesebben vettek részt, az eredmény mégis örvendetesen kedvező. A bizottság az első br. Eötvös Loránd díjra *Kornfeld Albertet* javasolja, aki a bpesti V. ker. áll. főreáliskolában Fröhlich Károly tanítványa volt. Tárgyalásai alaposságukkal és szigorúságukkal tűnnek ki. A második br. Eötvös Loránd díjra *Hajnal Kálmánt*, a bpesti I. ker. áll. főgymnasium és Dunay Zoltán tanítványát ajánlja, ki ugyancsak mind a három tételt kifogástalanúl és szabatos fogalmazással oldotta meg. Dicséretre javasolja még a bizottság *Haitsch* Gyulát, *Rózsa* Jenőt és *Jendrássik* Györgyöt, kik az első és második, továbbá *Pfeifer* Istvánt, *Szilárd* Leót, *Bergsmann* Emmát és *Teichner* Lászlót, kik az első és harmadik tétel helyes kidolgozásával tűntek ki. —

A folyó évi deczember hó 7-én tartott választmányi ülés a bizottság e javaslatát határozattá emelte.

II.

Az I. physikai tanulóverseny.

A folyó évi november hó 11-én tartott I. physikai tanulóversenyre Budapesten 16 versenyző jelentkezett. Kolozsvárott, sajnos, nem jelentkezett versenyző. A verseny zárt helyiségben, a társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett szabályszerűen folyt le. Budapesten beadatott 14 dolgozat.

A kitűzött tételek a következők voltak:

1. Ha naprendszerünknek anyageloszlásában hű mintáját

$$\frac{1}{150\,000\,000\,000}=\frac{1}{15.10^{10}}$$

arányban (úgy hogy abban a földnek naptóli távola kb. 1 méter legyen) elkészítenők, mekkora volna e mintában az évnek tartama?

2. Milyen adatok ismeretére van szükségem, ha Daniel-elemekkel izzított monowattos lámpám világítási költségeit megállapítani akarom?

A biráló bizottság határozatáról az alábbi jegyzőkönyv számol be:

Jegyzőkönyv

az I. physikai tanulóversenyen beadott dolgozatok elbirálása ügyében 1916 decz. 1-én tartott bizottsági ülésről. Jelen vannak: br. Eötvös Loránd elnök, Bartoniek Géza és Mikola Sándor.

A dolgozatok átvizsgálása után a bizottság örömmel állapítja meg, hogy az I. physikai tanulóverseny jó eredménynyel végződött. A versenyzők megmutatták, hogy a középiskolában szerzett ismereteiket fel tudják használni és így megfeleltek a feladatok kitűzésében megnyilvánuló intentióknak.

Az átvizsgált 14 dolgozat közül Jendrássik György, Kornfeld Albert és Szilárd Leo dolgozata tűnik ki. Jendrássik és Szilárd a kitűzött első feladatot a középiskolában szerzett ismereteik alapján egészen helyesen oldották meg; a második feladatot Jendrássik a fődolgokban helyesen fogta fel, de nem oldotta meg teljesen, Szilárd figyelme pedig e feladat megoldása közben a fődologról mellékdolgokra terelődött el. Kornfeld az első feladatot nagyobbkörű ismeretekről tanúskodó — az előbbeniektől elütő — módszerrel helyesen oldotta meg, azonban a második feladat lényegét nem ismerte fel.

Ezek alapján a bizottság javasolja, hogy az I. Károly Irén díj *Jendrássik György*nek, a budapesti VIII. k. főreálban Koren Dénes tanítványának, a II. Károly Irén díj *Szilárd Leó*nak a budapesti VI. ker. főreálban Balog Mór tanítványának itéltessék oda; javasolja továbbá a bizottság, hogy *Kornfeld* Albert dicséretben részesüljön. —

A folyó évi deczember 7-én tartott választmányi ülés a bizottság e javaslatát egyhangúlag elfogadta és ezzel határozattá emelte.

*

A választmányi ülést követő előadó-ülésen *báró Eötvös Loránd* elnök a nyerteseknek átadja a jutalmat buzdító szavak kíséretében és kérve őket, hogy adják át tanáraiknak a Társulat üdvözletét.

Báró Eötvös Loránd elnök az előadóülést a következő szavakkal nyitotta meg:

Tisztelt társulat!

Hosszú szünet után ma újra összegyűlve üdvözlöm a megjelenteket.

A viszontlátás örömében mosolyogni szeretnénk, de elszántságunk egész erejére van szükségünk, hogy sírva ne fakadjunk.

Gyász van körülöttünk, gyász van a mi szivünkben is.

Gyászol az egész ország, mert elvesztette s eltemette jó öreg királyát, kinek uralkodása alatt keletkezett, gyarapodott és virágzott fel hazánknak annyi meg annyi, művelődését fejlesztő intézménye — sok nagy között ez a szerény társulat is.

És a mikor e közös gyászban osztozik a nemzet minden fia, nincsen akkor ház, kunyhó vagy palota e hazában, mely ne siratná még a maga saját halottját is, ne várná hiába a kegyetlen harczok mezejéről vissza már nem térő hozzátartozóját.

A mi házunk is üresebb és csendesebb lett. Hiába minden vágyakozásunk, körünkben nem láthatjuk többé a harczban elesett társainkat ifj. *Andreánszky István* bárót, *Bartoniek Emilt, Homor Ernőt, Horváth Kálmánt, Léber Gyulát, Raj Lászlót, Schuller Alajost* és nem láthatjuk *Zemplén Győzőt.*

Megállok e névnél, mert viselője a többieknél még szorosabban volt összeforrva e helylyel és e társulattal s mert tudom, hogy itt egybegyűlt társaim ezt várják tőlem, hiszen mi voltunk a fiatal, a kedves, a tudós Zemplén Győzőnek legmeghittebb barátai.

E helyen és ebben a környezetben minden az ő emlékét hirdeti.

Húsz évvel ezelőtt, a mathematikai tanulóverseny díjkiosztásának egy szerencsés órájában itt láttuk őt először, mikor mint egyetemi tanuló fiatalságának díszében, az öröm ragyogásával szép szemeiben, ruganyos lépésekkel, egyenes tartással büszkén és mégis szerényen lépett elénk, hogy átvegye az e versenyen jól megérdemelt jutalmat.

Innét indult el tanuló útjára s ide tért vissza négy év mulva, mint a tudománynak sub auspiciis doctora s azután itt ebben az intézetben töltött 12 évet, míg a műegyetem tanári székében hozzá méltó tevékenységi térre lépett.

Sokat dolgozott és szeretett dolgozni, nemcsak tanult és tanított, de maga is művelte a tudomány mezejét és e tudományos munkásságának gyümölcseit legszivesebben nekünk itt e teremben mutatta be. Különösen ügyes volt abban, hogy e gyümölcsöket, még ha kemény dió is akadt közöttük, világosságot teremtő szavaival, kedves előadásával mindannyiunknak izletesekké tegye.

Mint társulatunk titkára és folyóiratunk egyik szerkesztője, pontosan s mindenkit megnyerő kedvességgel teljesítette a tisztjével járó teendőket — utoljára a jelen év tavaszán tartott közgyűlésünk alkalmával. Jól emlékszem ez összejövetelünkre, akkor itt ült ő mellettem s én reá mutatva a gyönyörű katonára, az elismert tudósra, teljes bizalommal jövőnkben mondhattam, hogy «hazánk és hazánkban a tudomány el nem veszhet, a míg a harcztéren ilyen katonái, a tudomány mezején ilyen munkásai lesznek.»

Ma csak emlékét idézhetem már körünkbe, ebbe a terembe, a hol mint tudósnak bölcsőjét ringattuk, a hol előadásait oly örömmel hallgattuk, s a hol nevét mint elhunyt hozzánktartozóét még sokáig szeretettel fogjuk emlegetni.

De nem elég ez a szomorúságból. Még egy megrendítő veszteségünket kell bejelentenem. Mult hó 26-ikán a harcztéren szerzett betegsége következtében elhunyt *Geőcze Zoárd*, a nagy mathematikus, a mi kedves társunk, ki a felületek elméletére vonatkozó vizsgálódásainak világra szóló eredményeit itt velünk is közölni szokta. Sem házi gondok és gyermekek zaja, sem a lövészárok kényelmetlenségei s az ágyúk dörgése nem zavarták meg őt abban, hogy gondolkozását kedvencz feladatának megoldására összpontosítsa s arra vonatkozó tudásunkat kibővíteni és mélyíteni törekedjék. Tiszteletet s hervadhatatlan babért érdemel az, ki mint ő, eszményi czélt tűz ki maga elé s ahhoz hű marad a halálig!

Tisztelt gyülekezet! Bizony van okunk a szomorúságra, de azért nem adhatjuk fel a reményt, mely nekünk erőt adjon munkánk folytatására. Hiszen ma a XXIII. mathematikai és az I-ső physikai tanulóverseny díjainak kiosztására gyűltünk össze. Miért ne lehetne a versenyzők között, a fiatalok között, a kik mindnyájunk örömére ma ide jöttek, egy vagy több olyan erős legény, ki Zemplén példája nyomán fog előrehaladni, vagy olyan, a ki el fogja érni azt a magas tudományos színvonalat, melyhez Geőcze Zoárd eljutott?

Én hiszem, hogy van, mathematikai versenyeink eddigi eredménye jogossá teszi e reményemet.

Elnöktársam *Károly Irén* tudományszeretetének és bőkezű gondoskodásának köszönhetjük azt, hogy a physikai tanulóversenyeken immár mi is, a physika öregebb művelői szemlét tarthatunk az újonczokon, kikből majdan utódaink fognak kiválni. Hálánkat fejezve ki az alapitónak, kívánjuk, legyen meg az az öröme, hogy a Károly Irén-díj nyertes tanulói valamikor a physika hivatott mestereivé növekedjenek. Ezzel a reménynyel üdvözlöm az egybegyülteket és kérem titkárunkat, tegyen nekünk jelentést a társulat választmányának a XXIII-ik mathematikai és az I-ső physikai tanulóversenyek dolgában hozott határozatáról.

A XXIII. mathematikai tanulóversenyen br. Eötvös Loránd-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

I. Kornfeld Albert dolgozata.

I. Bebizonyítandó, hogy az

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0$$

egyenletnek, a melyben a és b positiv számok, két valós gyöke van és hogy az egyik gyök $\frac{a}{3}$ és $\frac{2a}{3}$, a másik $-\frac{2b}{3}$ és $-\frac{b}{3}$ közé esik.

Megoldás.

1. Legyen

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=f(x),$$

akkor

$$f\left(\frac{a}{3}\right)=3\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{a+3b}\right),\quad f\left(\frac{2a}{3}\right)=-3\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{2a+3b}\right)$$

$$f\left(-\frac{2b}{3}\right)=3\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{3a+b}\right),\quad f\left(-\frac{b}{3}\right)=-3\left(\frac{1}{2b}+\frac{1}{3a+b}\right).$$

A zárójelben mindenütt positiv mennyiségek állanak, mert a és b positiv számok, és

$$\frac{1}{2a}>\frac{1}{2a+3b}$$

$$\frac{1}{2b}>\frac{1}{3a+2b}.$$

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

Ennélfogva:

$$f\left(\frac{a}{3}\right) > 0, \quad f\left(\frac{2a}{3}\right) < 0; \quad f\left(-\frac{2b}{3}\right) > 0, \quad f\left(-\frac{b}{3}\right) < 0$$

$f(x)$ folytonos a $\left(-\frac{2b}{3}, -\frac{b}{3}\right)$, $\left(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}\right)$ intervallumokban, beleértve azok végpontjait is, mert megvan ez a tulajdonsága a $(-b, 0)$, $(0, a)$ intervallumok minden belső pontjában.

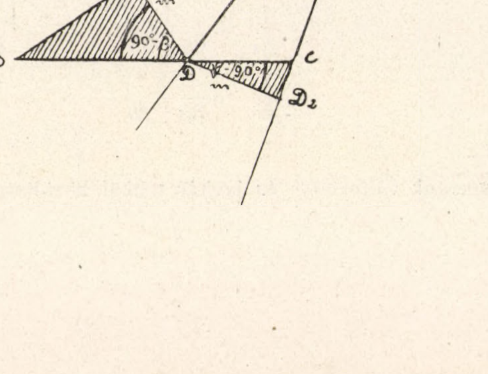
A $\left(-\frac{2b}{3}, -\frac{b}{3}\right)$, $\left(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}\right)$ intervallumok kezdőpontjában $f(x)$ értéke positiv, végpontjaikban negativ, tehát kell, hogy ezen intervallumok mindegyikének belsejében legyen olyan x_1, illetve x_2 érték, melyre nézve $f(x_1) = f(x_2) = 0$, a mi bebizonyítandó volt.

II. Felezzük valamely ABC háromszög A-nál lévő belső szögét és legyen D e szögfelező egyenes metszéspontja a BC oldallal. Bebizonyítandó, hogy a szögfelező AD darabja rövidebb mint az AB és AC oldalak geometriai középarányosa.

Megoldás.

Ejtsünk D pontból merőlegeseket az AB és AC oldalakra; talppontjuk legyen D_1, illetve D_2. $DD_1 = DD_2 = m$.

Jelöljük az AD_1DD_2 négyszög területét T-vel, az ABC háromszögét T'-vel, a DD_1B és DD_2C derékszögű háromszögek területe pedig legyen t_1, illetve t_2.



Ekkor (az előjeltől eltekintve)

$$t_1 = \frac{m^2}{2} \operatorname{ctg} \beta, \quad t_2 = \frac{m^2}{2} \operatorname{ctg} \gamma.$$

Minden esetben, akár van a derékszögnél nagyobb a β és γ között, akár nincs, fennáll a következő összefüggés:

$$T = T' - \frac{m^2}{2} (\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = T' - \frac{m^2}{2} Q. \qquad (1)$$

Q mindig positiv, abban az esetben is, ha a β, γ szögek egyike, mondjuk a $\gamma > 90°$. Ekkor ugyanis $Q = \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \varphi$, a hol $\varphi = 180° - \gamma$ hegyes-szög. Mindenesetre $\beta + \gamma < 180°$, tehát φ és β olyan hegyesszögek, hogy $\varphi > \beta$. De tudjuk, hogy ebben az esetben $\operatorname{ctg} \varphi < \operatorname{ctg} \beta$, a miből következik, hogy $Q > 0$.

Az (1) összefüggésből ezek után:

$$T < T'.$$

De

$$T = m\overline{AD}_1 = \overline{AD} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \overline{AD} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{AD}^2 \sin \alpha}{2}$$

és

$$T' = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \alpha}{2}.$$

Innen

$$\frac{\overline{AD}^2 \sin \alpha}{2} < \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \sin \alpha}{2}$$

$\frac{\sin \alpha}{2}$ positiv mennyiség ($\alpha < 180°$) s így szabad vele az egyenlőtlenséget elosztani, tehát

$$\overline{AD}^2 < \overline{AB} . \overline{AC},$$

ami bebizonyítandó volt.

III. Osszuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokat tetszőleges módon 2 csoportba. Bebizonyítandó, hogy a két csoport közül az egyik olyan, hogy benne két szám található, melyeknek különbsége ugyanabban a számcsoportban foglaltatik.

Megoldás.

1.	1 , 2 3 4 5 2 , 1 3 4 5 stb.	Ha az 5 szám közül kiragadjuk az 1-est, a másik csoportban pl: 5 – 3=2, ha mást ragadunk ki belőle, azért marad benne két egymás után következő szám, melyeknek különbsége 1.
2.	1 2 , 3 4 5 1 3 , 2 4 5 1 4 , 2 3 5 1 5 , 2 3 4 2 3 , 1 4 5 2 4 , 1 3 5 2 5 , 1 3 4 3 4 , 1 2 5 3 5 , 1 2 4 4 5 , 1 2 3	Az itt felhozott 10 példa a lehetséges esetek számát kimeríti.

II. Hajnal Kálmán dolgozata.

I. Bebizonyítandó, hogy az

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0$$

egyenletnek, melyben a és b pozitiv számok, két valós gyöke van és hogy az egyik gyök $\frac{a}{3}$ és $\frac{2a}{3}$, a másik $-\frac{2b}{3}$ és $-\frac{b}{3}$ közé esik.

Az egyenletet rendezve

$$(x-a)\,(x+b)+x\,(x+b)+x\,(x-a)=0$$

$$x^2-ax+bx-ab+x^2+bx+x^2-ax=0$$

$$3x^2-x\,(2a-2b)-ab=0.$$

Innen

$$x=\frac{2a-2b\pm\sqrt{4a^2-8ab+4b^2+12ab}}{6}=$$

$$=\frac{a-b\pm\sqrt{a^2+ab+b^2}}{3}$$

$$x_1=\frac{a-b+\sqrt{a^2+ab+b^2}}{3}$$

$$x_2=\frac{a-b-\sqrt{a^2+ab+b^2}}{3}.$$

Minthogy a és b poz. számok, az

$$a < \sqrt{a^2 + ab + b^2} < a + b$$
$$b < \sqrt{a^2 + ab + b^2} < a + b$$

egyenlőtlenségek feltétlenül fennállanak. x_1-ben $\sqrt{a^2+ab+b^2}$ helyébe a a nála kisebb b-t, azután a nagyobb $(a+b)$-t téve, x_2-ben $\sqrt{a^2+ab+b^2}$ helyébe a nála kisebb a-t, azután a nagyobb $(a+b)$-t téve, az

$$\frac{a}{3} < x_1 < \frac{2a}{3}$$

és

$$-\frac{2b}{3} < x_2 < -\frac{b}{3}$$

egyenlőtlenségeket nyerjük, a mivel a tételt be is bizonyítottuk.

III. Osszuk az

1, 2, 3, 4, 5

számokat tetszőleges módon két csoportba. Bebizonyítandó, hogy a két csoport közül az egyik olyan, hogy benne két szám található, melyeknek különbsége ugyanabban a számcsoportban foglaltatik.

Az egyik csoportba 4, a másikba 1 elemet téve, 5féle csoportosítás lehetséges. Ezek a következők:

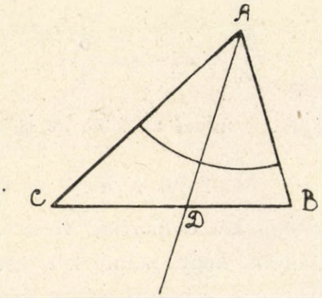
		Az előző csoportot megvizsgálva
1, 2, 3, 4,	5	$4-3=1$ stb.
1, 2, 3, 5,	4	$5-3=2$ stb.
1, 2, 4, 5,	3	$5-4=1$ stb.
1, 3, 4, 5,	2	$5-4=1$ stb.
2, 3, 4, 5,	1	$5-3=2$ stb.

Az egyik csoportba 3, a másikba 2 elemet téve, $\binom{5}{3} = 10$féle csoportosítás lehetséges. Ezeket megvizsgálva

1, 2, 3	4, 5	$3-2=1$ stb.
1, 2, 4	3, 5	$4-2=2$ stb.
1, 2, 5	3, 4	$2-1=1$
1, 3, 4	2, 5	$4-3=1$
1, 3, 5	2, 4	$4-2=2$
1, 4, 5	2, 3	$5-4=1$ stb.
2, 3, 4	1, 5	$4-2=2$
2, 3, 5	1, 4	$5-2=3$ stb.
2, 4, 5	1, 3	$4-2=2$ stb.
3, 4, 5	1, 2	$2-1=1$

Több csoportosítást nem is kell végeznünk, mert ismét ezeket a már megvizsgált csoportokat kapnók. Minthogy tehát az összes esetekben találtunk a tétel követelményeinek megfelelő számokat, kimutattuk annak helyességét.

II. Felezzük valamely ABC háromszög A-nál lévő belső szögét és legyen D e szögfelező egyenes metszéspontja a BC oldallal. Bebizonyítandó, hogy a szögfelező AD darabja rövidebb, mint az AB és AC oldalak geometriai középarányosa.



Tudjuk a planimetriából, hogy

$$AD^2 = AC \, . \, AB - BD \, . \, CD,$$

tehát

$$AD^2 < AC \, . \, AB$$
$$AD < \sqrt{AC \, . \, AB}.$$

Az I. physikai tanulóversenyen Károly Irén-díjjal jutalmazott dolgozatok.

I. Jendrássik György dolgozata.

I. Ha naprendszerünknek anyageloszlásában hű mintáját

$$\frac{1}{150,000,000,000} = \frac{1}{15 \,.\, 10^{10}}$$

arányban (úgy, hogy abban a földnek naptóli távola kb. 1 m legyen) elkészítenők, mekkora volna e mintában az évnek tartama?

Megoldás.

Hogy a nap körül forgó föld pályáját el ne hagyja, kell, hogy a czentrifugális erő egyenlő legyen a tömegvonzás által előidézett erővel:

$$\frac{4\pi^2 r_1 m_1}{T_1^2} = k\frac{M_1 m_1}{r_1^2}.$$

Itt m_1 a föld tömege, M_1 a nap tömege, r_1 a földnek a naptóli távola és T_1 a körülforgás ideje.

Az általunk előállított kis mintában is kell, hogy e követelmény kielégíttessék:

$$\frac{4\pi^2 r_2 m_2}{T_2^2} = k\frac{M_2 m_2}{r_2^2},$$

tehát

$$\frac{T_2^2}{T_1^2}\,\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{M_1}{M_2}.$$

Ámde

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\rho_1^3}{\rho_2^3},$$

a hol ρ_1 a nap sugara és ρ_2 a mintában a nap sugara s így

$$\frac{T_2^2}{T_1^2}\,\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{\rho_1^3}{\rho_2^3}$$

és mert a minta méretei folytán

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{\rho_1^3}{\rho_2^3},$$

következik, hogy:

$$T_1 = T_2$$

II. Milyen adatok ismeretére van szükségem, ha DANIEL-elemekkel izzított mono-wattos lámpám világítási költségeit megállapítani akarom?

Megoldás.

Ismernem kell az 1 joule munka termelésénél $ZnSO_4$-gyé alakult Zn mennyiségét és árát; úgyszintén az erre a folyamatra szükségeltetett H_2SO_4 árát.[1]

II. Szilárd Leó dolgozata.

I. Newton az ő róla elnevezett híres gravitatiós törvényt KEPLER megfigyeléseiből vezette le. Kiindulásul KEPLER III. törvénye szolgált, mely szerint $\frac{R^3}{T^2} = \text{const.}$ Minthogy ez minden, a naprendszerhez tartozó bolygóra igaz, feltételezte, hogy ez állandó a közös nap tömegétől függ, még pedig $\frac{R^3}{T^2} = aM$ (a hol M a nap tömege). Ha ma fordítva a gravitatiós törvényből indulunk ki, be lehet bizonyítani, hogy e tétel igaz és pedig $a = \frac{G}{4\pi^2}$.

Legyen a nap valódi tömege M, az év hossza T és a földpálya közép radiusa R, akkor

$$T^2 = \frac{R^3}{aM}$$

$$T = \sqrt{\frac{R^3}{aM}}.$$

Az új, mi általunk alkotott rendszerben a nap sugara a valódi nap sugarának $\frac{1}{q}$-szorosa, a hol $q = 15 . 10^{10}$. Az új pálya sugara $R' = \frac{R}{q}$, az új nap tömege pedig $M' = \frac{M}{q^3}$

$$T' = \sqrt{\frac{R'^3}{aM'}},$$

$$T' = \sqrt{\frac{\left(\frac{R}{q}\right)^3}{a\frac{M}{q^3}}},$$

tehát

$$T' = T,$$

vagyis az új év megegyezik a régi évvel.

[1] A megoldás nem teljes, mert a lámpa melegítésének költségei mellett nem veszi számba a telepben és a lámpát ahhoz kapcsoló vezetékben kifejtett hőtermelés költségeit. *Szerk.*